Segunda edición

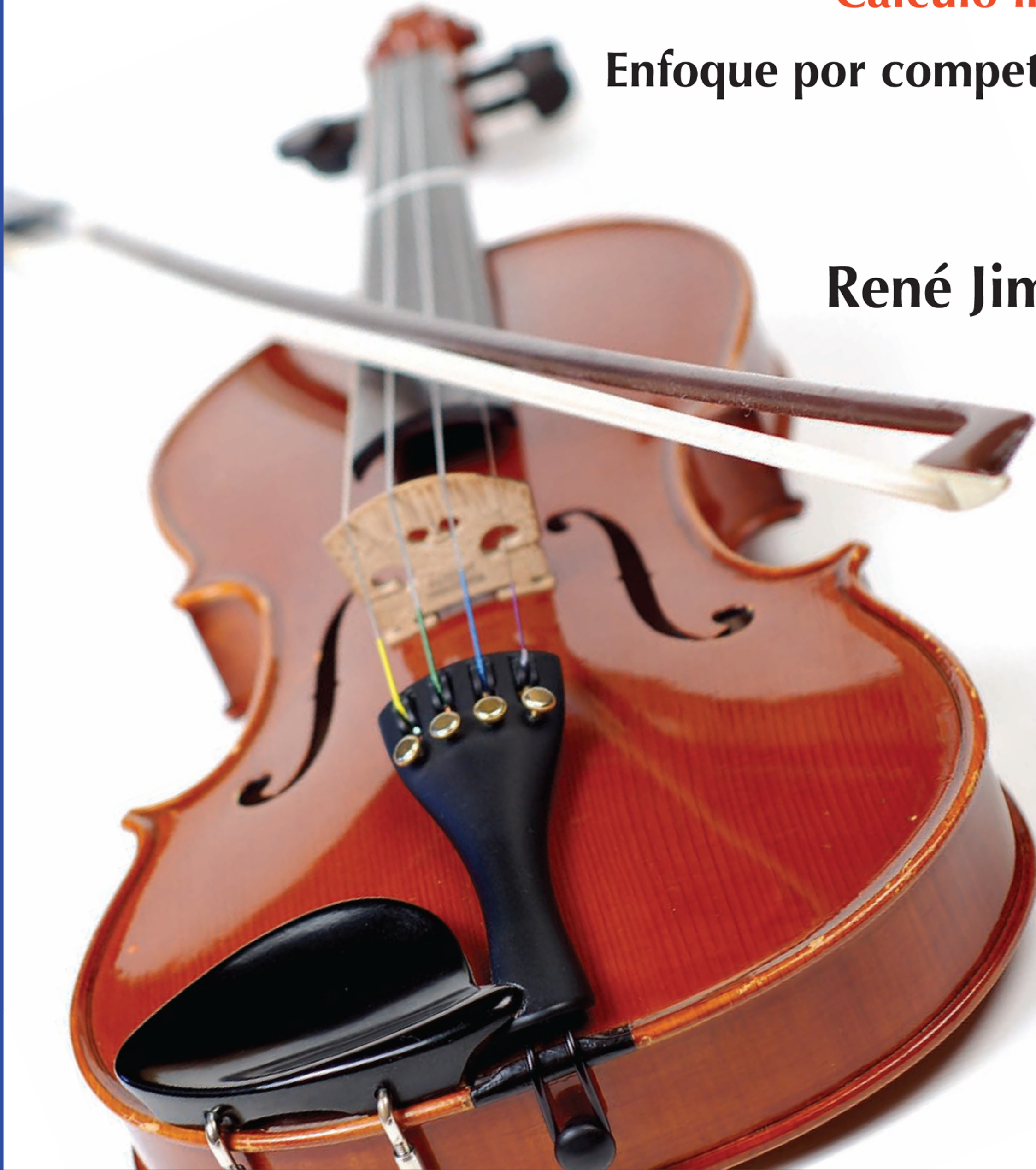
u-libros.com

Matemáticas VI

Cálculo integral

Enfoque por competencias

René Jiménez



ALWAYS LEARNING

PEARSON

Matemáticas VI
Cálculo integral
Segunda edición

René Jiménez
Colegio de Bachilleres

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Jiménez, Manuel René

Matemáticas VI. Cálculo integral
Segunda edición

Pearson Educación, México, 2011

ISBN: 978-607-32-1011-9

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 19 × 23.5 cm Páginas: 208

Dirección general:	Laura Koestinger
Dirección K-12:	Santiago Gutiérrez
Gerencia editorial:	Rodrigo Bengochea
Coordinación editorial:	Gloria Morales
Coordinación de arte y diseño:	Asbel Ramírez
Edición sponsor:	Enrique Quintanar e-mail: enrique.quintanar@pearson.com
Edición de desarrollo:	Olga Sánchez
Corrección de estilo:	Merari Fierro
Lectura de pruebas:	Julián Rodríguez
Supervisión de arte y diseño:	Yair Cañedo
Diseño de portada:	Equipo de Arte y Diseño de Pearson
Diagramación:	Ediciones y Recursos Tecnológicos
Dirección K-12 Latinoamérica:	Eduardo Guzmán Barros
Gerencia editorial K-12 Latinoamérica:	Clara Andrade

SEGUNDA EDICIÓN, 2011

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

ISBN VERSION IMPRESA: 978-607-32-1011-9
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-1012-6
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-1013-3

Primera impresión. Impreso en México.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 14 13 12 11

PEARSON

Contenido

Presentación

El propósito fundamental del presente libro es presentar los temas que deben integrar un curso básico de *cálculo integral*.

La estructura del contenido está diseñada para cumplir con la propuesta nacional de la **Reforma Integral de la Educación Media Superior** (RIEMS). La finalidad es que el estudiante de este curso adquiera una educación pertinente, relevante y de más calidad para que le permita alcanzar las **competencias** necesarias que desarrollen su creatividad y su pensamiento abstracto que lo conduzcan a la solución de situaciones que se le presenten en su paso por la escuela o en su vida cotidiana.

En el desarrollo del texto se ha tenido un especial cuidado para que las actividades propuestas sean de corte constructivista, centradas en el educando y en los valores que lo deben caracterizar.

Por mi experiencia docente estoy convencido de que el material aquí presentado es un gran apoyo didáctico para los maestros que decidan adoptarlo como texto, ya que al inicio de cada tema cuenta con situaciones didácticas que detonan el aprendizaje significativo de los estudiantes para inmediatamente abordar los conceptos teórico-prácticos a manera de texto y cuaderno de trabajo; de tal forma que facilite la tarea docente del profesor al momento de administrar su trabajo.

Los temas están integrados en 4 bloques de la siguiente manera:

Bloque 1. El estudiante realiza aproximaciones y estimaciones de errores y/o tolerancias a partir del concepto de diferencial.
Bloque 2. Conocida la diferencial de una función se puede determinar la primitiva de la función integrando funciones algebraicas y trascendentes que les permitan a los estudiantes modelar situaciones en el campo de otras ciencias.
Bloque 3. El estudiante va poder calcular e interpretar el área bajo la gráfica de una función teniendo como referente el concepto de integral definida, extendiendo su utilidad en el campo de las ciencias naturales, sociales y administrativas.
Bloque 4. El estudiante resuelve situaciones reales o hipotéticas aplicando la integral definida en el campo de las ciencias exactas, sociales y naturales.

Al final se incluye un apéndice con algunos métodos de integración para que el libro tenga un perfil más funcional y universal en cursos que contemplen otros programas.

Sinceramente, mi mejor deseo es que esta obra sea una buena opción para que los estudiantes logren desarrollar y potencializar las competencias que agreguen valor a su desarrollo personal, académico y profesional, ya que esto será un excelente indicador para que el personal docente vea culminado su esfuerzo y su significativa misión educativa.

Éxito para todos y gracias por la confianza y la oportunidad de compartir esta propuesta educativa.

René Jiménez

Competencias

Las **competencias** en un individuo son la integración de habilidades, conocimientos y actitudes que adquieren las personas con el propósito de resolver exitosamente las situaciones que se le presenten en un contexto determinado.

Competencias genéricas del bachillerato

Las competencias genéricas del bachiller se refieren a la capacidad de respuesta que éste tiene y que le permiten comprender e influir en su entorno (local, regional, nacional e internacional), contar con herramientas básicas para continuar aprendiendo a lo largo de la vida, y convivir adecuadamente en los diferentes ámbitos.

El presente texto tiene como propósito fundamental desarrollar en los estudiantes las siguientes competencias genéricas.

- Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
- Elige y practica estilos de vida saludables.
- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

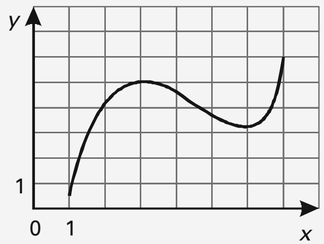
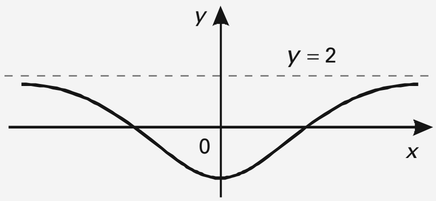
Competencias disciplinares extendidas

Se refieren al desarrollo académico del estudiante que le permite participar de forma activa en la sociedad del conocimiento y proseguir así sus estudios superiores, tal como se enuncian a continuación.

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, graficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

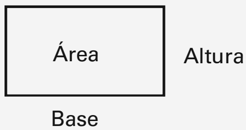
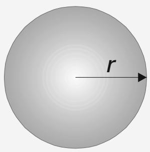
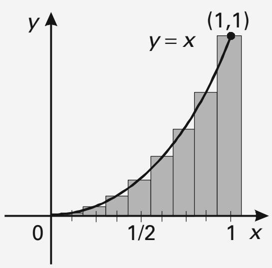
Evaluación diagnóstica

Encuentra la solución para cada una de las siguientes situaciones y anótala en la columna de la derecha.

Situación	Solución
1. Es una regla de dependencia entre dos variables de forma que una (*independiente*) define un y sólo un valor de la otra (*dependiente*).	
2. Escribe el nombre y el dominio de la siguiente función: $$f(x)=\frac{x}{1-x}$$	
3. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Expresa el área como función de la longitud de uno de sus lados.	
4. Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=x-2$ encuentra la función compuesta: $$(f\circ g)(x)$$	
5. Dada la gráfica de f estima el valor de $f(3)$ 	
6. Si $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-2$ ¿es posible que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ exista?	
7. Dada la gráfica de f estima el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 	

(*Continúa*)

(*Continuación*)

8. Si $y = f(x)$ escribe si la siguiente expresión es verdadera o falsa para definir la derivada de $f(x)$ $$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$	
9. Dado $f(x) = 1 + x - x^2$ encuentra $f'(1)$	
10. El costo de producir x artículos es $C = f(x)$ ¿Qué significa la igualdad $f'(20) = 100$ pesos?	
11. La ecuación de posición de una partícula en movimiento es $s(t) = 64 - 16t^2$ ¿Cuál es su velocidad después de $t = 2$ segundos?	
12. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. ¿Qué dimensiones debe tener para obtener la figura de mayor área? 	
13. El departamento de calidad de una industria que produce bolas de acero para rodamientos de 1 cm de diámetro encuentra que éstas son funcionales hasta con una tolerancia de ±0.03 cm al momento de su elaboración. Determina la variación permitida que puede tener el volumen de las esferas. (El volumen de una esfera se puede calcular con $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 	
14. Calcula la altura de cada rectángulo y aproxima el área debajo de la curva $y = x^2$ en el intervalo [0, 1] sumando el área de cada uno de ellos. 	

Agradecimiento

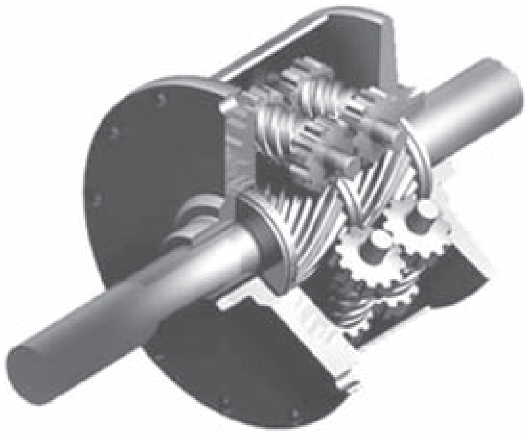
Mi más sincero y profundo agradecimiento a la ingeniera Silvia Rascón Corral por su apoyo, consejos y sugerencias en la revisión de este libro.

Matemáticas VI

Cálculo integral

BLOQUE 1

Diferenciales



El mecanismo diferencial de un auto permite repartir el esfuerzo de giro entre el par de ruedas de un automóvil al tomar una curva para equilibrar la diferencia de espacio que hay al recorrer circunferencias de diferente radio.

Desempeños del estudiante al concluir el bloque

- Calcula e interpreta aproximaciones de la derivada de modelos matemáticos relativos a diversas disciplinas, a partir de su representación gráfica y la determinación de su diferencial.
- Aplica la diferencial para determinar el error presente en el resultado de la medición de una magnitud en situaciones reales.

Objetos de aprendizaje

- Aproximaciones.
- Estimación de errores.

Competencias a desarrollar

- Construye el modelo matemático de un fenómeno, aproxima el comportamiento de su derivada a partir del cálculo de la diferencial y lo interpreta gráficamente.
- Analiza el error obtenido mediante la aplicación de la diferencial para determinar la precisión en la medición de una magnitud, y cómo afecta a la confiabilidad de ésta en situaciones reales.

- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades al trabajar con aproximaciones y estimación de errores.

Actividades de enseñanza

- Realizar una presentación multimedia del cálculo de la diferencial y su relación con la derivada.
- Explicar mediante ejemplos y ejercicios el comportamiento de la derivada en una función; proporcionar y asignar diferentes problemas para su resolución e interpretación gráfica.
- Solicitar la investigación de una aplicación de las diferenciales en aproximaciones y estimaciones de errores relacionadas con las ciencias exactas, naturales y sociales.

Actividades de aprendizaje

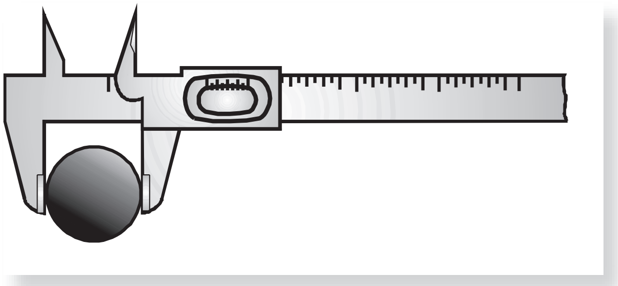
- Analizar en equipos el contenido de la presentación, e identificar los elementos operacionales involucrados en el cálculo de la diferencial y su relación con la derivada. Valorar la importancia del trabajo realizado y emitir sus conclusiones al grupo.
- Analizar en equipos los ejercicios proporcionados por el profesor(a), resolver los problemas asignados e interpretar gráficamente los resultados obtenidos, y argumentar en equipos la aplicación y uso en diferentes situaciones de su vida cotidiana.
- Dividir el grupo en dos tipos de equipos: uno de aproximaciones y otro de estimación de errores; realizar la práctica y verificar los resultados.
- En binas formadas por un especialista de aproximación y uno de estimación de errores, intercambiar información para unificar aprendizajes.
- Integrado en tu equipo original, seleccionar la mejor opción encontrada de cada una de las aplicaciones estudiadas, exponer en una presentación multimedia los resultados obtenidos; y argumentar la aplicación de los conocimientos adquiridos en situaciones de carácter social, natural y administrativo de la vida cotidiana.
- Redactar un reporte de la investigación donde señales tus fortalezas y debilidades en relación con la aplicación de las diferenciales.

Diferenciales, aproximaciones y errores de medición

Desarrolla tus competencias

Al medir el radio de un disco circular con un vernier, éste resulta ser como de 10 cm, con un **error máximo** en la medición de 0.1 cm.

a) **Estima el error máximo** en el área calculada del disco.
b) ¿Cuál es el **error relativo**?



Secuencia didáctica

- El área del disco se obtiene a partir de la fórmula $A = \pi r^2$.
- Calcula el área del disco con el radio esperado de 10 cm.
- Aproxima el área del disco con radio igual a 9.9 cm y enseguida con un radio de 10.1 cm.
- Obtén el posible error de medición con el valor numérico de la resta de las áreas obtenidas con los diferentes radios.
- Para conocer el error relativo de medición divide el error calculado entre el área total.

Trabajo de investigación

- En los campos de la ingeniería, la física y la química, ¿qué significa medir?
- ¿Cuál es la utilidad del vernier?
- ¿Para qué se utilizan los micrómetros?
- Comenta con tus compañeros la importancia de las tolerancias en los departamentos de calidad de una industria.

Definición de diferencial

En matemáticas, una de las mejores ideas que podemos tener de **aproximaciones** es a través del concepto de **diferencial**; pero, ¿qué significan las diferenciales?

Hasta ahora hemos utilizado la notación $\frac{dy}{dx}$ para indicar la derivada de una función $y = f(x)$, con respecto a x; sin embargo, no le hemos dado un significado por separado a dy o a dx. Esto es lo que veremos enseguida.

Antes recordemos que $y = f(x)$ es un símbolo que nos indica la dependencia que existe entre dos variables, y quiere decir que para un valor dado de x existe un y sólo un valor para y.

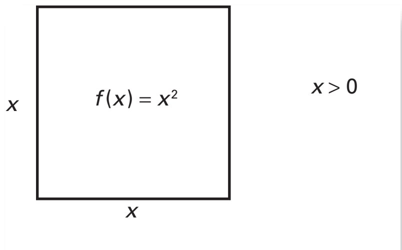
También hay que recordar que la derivada de una función $y = f(x)$ se define como un límite, como una velocidad o como la pendiente de la función en un punto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m = v$$

donde m y v significan pendiente y velocidad respectivamente.

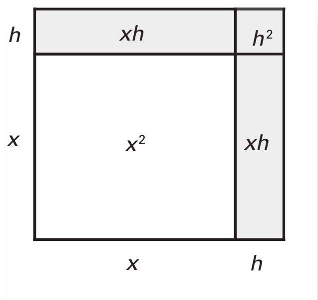
Para darle sentido a dy es necesario recurrir al significado geométrico de la derivada de una función, en la que vimos que, en efecto, $dx = \Delta x$; sin embargo, en esta ocasión utilizaremos, cuando sea necesario, el símbolo h como dx o como Δx.

Comencemos con un ejemplo sencillo para ilustrar el significado de dy. El área de un cuadrado de lado x está dada por la expresión $f(x) = x^2$, como se muestra en la figura.



Si suponemos que h es una cantidad que tiende a 0, y que la longitud de cada lado se incrementa de x hasta $x + h$, el área crece de $f(x)$ a $f(x + h)$. Por tanto, la variación del área es el incremento $\Delta f(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x)\\ &= (x+h)^2 - x^2\\ &= (x^2 + 2xh + h^2) - x^2\\ &= 2xh + h^2\end{aligned}$$



La parte gris de la figura es la variación del área $2xh + h^2$.

Ahora bien, la derivada de $y = x^2$, es:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Por tanto, podemos suponer que $dy = 2xdx$, o bien $dy = 2xh$, si recordamos que $h = dx$.

Al comparar por diferencia la variación del área $\Delta f(x) = 2xh + h^2$ con el valor de $dy = 2xh$, lo que tenemos es lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) - dy &= (2xh + h^2) - 2xh \\ &= h^2 \end{aligned}$$

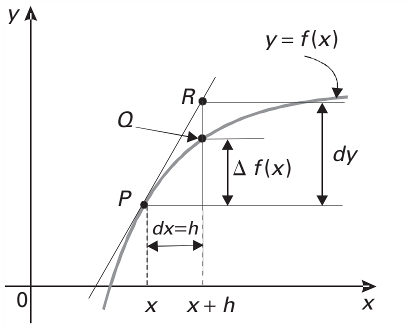
Como h tiende a cero, entonces h^2 todavía es más pequeño, lo cual nos lleva a concluir que dy es un valor lo suficientemente preciso cuando de medir **errores** se trata.

El ejemplo anterior nos enseña que si tenemos una función $y = f(x)$, y conocemos su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, entonces podemos calcular dy como el producto $f'(x)\,dx$. Ésta es precisamente la *diferencial de la función*, y se define como:

> **Diferencial.** La diferencial dy de una función $y = f(x)$ es el producto de su derivada, $f'(x)$ por dx.
>
> $$dy = f'(x)\,dx$$

Justificación gráfica de la definición de diferencial

Veamos de modo gráfico qué precisión ofrece la diferencial $dy = f'(x)h$



$f(x+h) - f(x) \cong f'(x)h$

La diferencia

$$dy - \Delta f(x) = f'(x)h - [f(x+h) - f(x)]$$

es pequeña comparada con h. ¿Por qué?

Porque el cociente

$$\frac{f'(x)h - [f(x+h) - f(x)]}{h}$$

tiende a 0 cuando h tiende a 0:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)h - [f(x+h) - f(x)]}{h} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)h}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\ &= f'(x) - f'(x) = 0\end{aligned}$$

Esto nos demuestra que la diferencial es un buen argumento en la estimación de errores cuando realizamos mediciones aproximadas.

A continuación, algunos ejemplos que nos ilustran la definición y algunas aplicaciones de las diferenciales.

Ejemplos

1. Calcular la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 4x + 2$
b) $y = e^{3x} + 2x$
c) $y = \ln x$

Solución

Función	Derivada	Diferencial
a) $y = 3x^2 - 4x + 2$	$\frac{dy}{dx} = 6x - 4$	$dy = (6x - 4)\,dx$
b) $f(x) = e^{3x} + 2x$	$\frac{df(x)}{dx} = 3e^{3x} + 2$	$dy = (3e^{3x} + 2)\,dx$
c) $y = \ln(2x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$	$dy = \frac{1}{x}\,dx$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

2. **Estimaciones.** Utilizar el concepto de diferencial para estimar el incremento de $f(x) = x^{2/3}$ cuando x se incrementa de 8 a 10.

   Solución

   Como $f(x) = x^{2/3}$, entonces $df(x) = f'(x)\,dx = \frac{2}{3}x^{-1/3}\,dx$

   $$df(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}\,dx = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx$$

   Para resolver la variación de la función f, tomamos $x = 8$ y $dx = 10 - 8 = 2$. La diferencial $df(x)$ toma entonces el valor

   $$df(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}}(2) = 0.\overline{6}$$

   Una variación de x desde 8 hasta 10 aumenta el valor de f en aproximadamente 0.66.

   Si probamos este resultado con la *calculadora* obtenemos:

   $$\Delta f(x) = f(10) - f(8) = (10)^{2/3} - (8)^{2/3} = 0.642$$

3. **Aproximaciones.** Utilizar el concepto de diferencial para estimar el valor de $\sqrt{29}$.

   Solución

   Sabemos que $\sqrt{25} = 5$. Por lo tanto, se necesita una estimación para el incremento de:

   $$f(x) = \sqrt{x}$$

   desde 25 a 29. La diferencial en este caso es:

   $$dy = f'(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

   con $x = 25$ y $dx = 29 - 25 = 4$, el valor de dy es:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}(4) = \frac{2}{5} = 0.4$$

Significa que una variación de x, desde 25 hasta 29, aumenta el valor de la raíz cuadrada en aproximadamente 0.4 unidades. Por tanto:

$$\sqrt{29} = \sqrt{25} + 0.4 = 5 + 0.4 = 5.4$$

Ahora bien, se puede comprobar que $(5.4)^2 = 29.16$ por lo que nuestra estimación está muy cercana al valor indicado en la raíz.

4. Estimar el valor de $\sqrt[3]{62}$ utilizando el concepto de diferencial.

Solución

El valor de $\sqrt[3]{64} = 4.$ Por lo tanto, se necesita una estimación para el cambio de:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

desde 64 a 62. La diferencial en este caso es:

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx$$

Con $x = 64$ y $dx = 62 - 64 = -2$, el valor de dy es:

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}(-2) = -\frac{2}{3(16)} = -\frac{1}{24} \approx -0.042$$

Significa que con una variación de x, desde 64 hasta 62, el valor de la raíz cúbica disminuye en aproximadamente 0.042 unidades. Por tanto:

$$\sqrt[3]{62} = 4 - 0.042 \approx 3.96$$

Ahora bien, se puede comprobar que $(3.96)^3 \approx 62.1$ por lo que nuestra estimación está muy cercana al valor indicado en la raíz.

Potencializa tus competencias

1. Completa la tabla para calcular la diferencial de las siguientes funciones.

Función	Derivada	Diferencial
a) $y = 2x^3 - 5x + 2$		
b) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$		
c) $y = e^{-3x+2}$		
d) $f(x) = \ln(2 - x)$		
e) $y = \cos 3x$		

2. **Comparación del incremento con la diferencial.** Utiliza diferenciales y completa la siguiente tabla tomando como referencia la función $y = x^2$. Considera un valor de $x = 2$ y los valores dados para dx (al final, observa que cuando dx tiende a cero, Δy y dy son prácticamente iguales). Recuerda que $\Delta y = (x + h)^2 - x^2$.

$dx = h$	dy	Δy	$\lvert \Delta y - dy \rvert$	$\frac{\Delta y}{dy}$
1.000	4.000	5.000	1.000	1.250
0.500				
0.100				
0.010				
0.001				

3. Utiliza diferenciales y completa la siguiente tabla tomando como referencia la función $y = \sqrt{x}$. Considera un valor de $x = 4$ y los valores dados para dx (al final, observa que cuando dx tiende a cero, Δy y dy son prácticamente iguales). Recuerda que $\Delta y = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$.

$dx = h$	dy	Δy	$\lvert \Delta y - dy \rvert$	$\dfrac{\Delta y}{dy}$
1.000				
0.500				
0.100				
0.010				
0.001				

4. Mediante diferenciales, completa la siguiente tabla para estimar el valor de las expresiones. Comprueba los resultados de las estimaciones con tu calculadora.

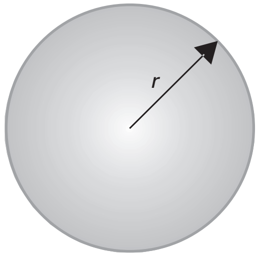
Expresión	Expresión algebraica de dy	Valor numérico de dy	Estimación de la raíz
a) $\sqrt{23}$	$dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$	$-\dfrac{1}{5}$	4.8
b) $\sqrt{27}$			
c) $\sqrt[4]{17}$			
d) $\sqrt[5]{33}$			
e) $(33)^{\frac{3}{5}}$			
f) $\sqrt{123}$			
g) $(29)^{\frac{2}{3}}$			

Aplicaciones de la diferencial en otros campos del conocimiento

1. Una esfera de metal, con radio de 5 cm, se recubrirá con una capa de plata de 0.015 cm de espesor. Aproximadamente, ¿qué cantidad de plata se necesitará?

Solución

Para estimar el aumento de volumen de la esfera cuando el radio aumenta de 5 cm a 5.015 cm, debemos considerar la fórmula del volumen de la esfera de radio r.



El volumen es $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$, entonces la diferencial es:

$$dV = 4\pi\, r^2 dr$$

Con $r = 5$ y $dr = 0.015$, tenemos que:

$$dV = 4\pi\, (5)^2 (0.015) = 1.5\pi \approx 4.7 \text{ cm}^3$$

Entonces se necesitarán, aproximadamente, 4.7 cm^3 de plata para recubrir la esfera.

2. Error relativo. Se midió el lado de un cubo metálico y resultó que es de 12 cm, con un error posible en la medición de 0.03 cm.

a) ¿Cuál es el error máximo al utilizar este valor de la arista para obtener el volumen del cubo?

b) Para tener mejor idea de la magnitud del error en la medición, calcular el **error relativo**.

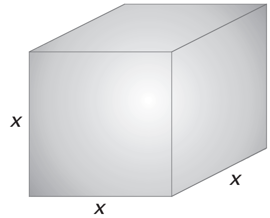
Solución

a) Llamemos x el lado del cubo, entonces su volumen es $V = x^3$. Si dx denota el error medido en el lado del cubo, por tanto el error al calcular el volumen se puede aproximar con la diferencial

$$dV = 3x^2 dx$$

Si $r = 12$ y $dr = 0.03$, tenemos que:

$$dV = 3(12)^2(0.03) = 12.96 \text{ cm}^3$$



El error máximo cometido al calcular el volumen es de 12.96 cm^3.

b) El **error relativo** se calcula dividiendo la magnitud del error entre el volumen total.

$$\frac{dV}{V} = \frac{12.96}{(12)^3} = 0.0075 \text{ cm}^3$$

Este error también podría expresarse como un **porcentaje** de 0.75%.

3. Error relativo. Al calentar una esfera de metal, su radio aumenta a razón de 0.1% por cada grado de aumento de la temperatura. Demostrar por medio de diferenciales que su volumen aumenta 0.3% por cada grado.

Demostración

El aumento de volumen $dV = 4\pi r^2$ de la esfera ocurre cuando el radio aumenta 0.1%.

Si el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $dr = 0.1\%\, r$ tenemos que:

$$dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2(0.001r) = 0.004\pi r^3$$

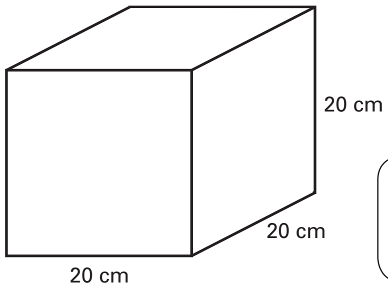
El aumento relativo del volumen es:

$$\frac{dV}{V} = \frac{0.004\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3(0.001) = 0.3\%$$

Evidencias de aprendizaje

1. Se encontró que el lado de un cubo es de 20 cm, con una tolerancia de error en la medición de 0.1 cm.
Utiliza diferenciales para estimar:

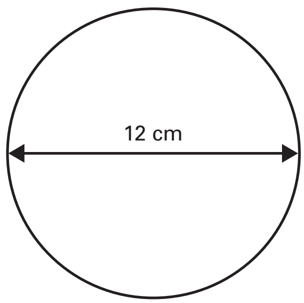
a) El error relativo máximo del volumen.
b) El error máximo en el área superficial del cubo.



R. *a*) 1.5%
b) 24 cm^2

2. Dado el diámetro de una circunferencia de 12 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm:

a) Utiliza diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada de la circunferencia.
b) Estima el error relativo del área.



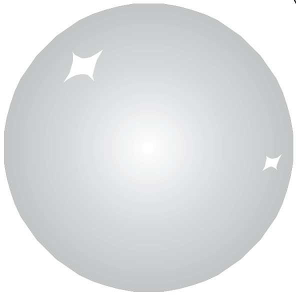
3. El diámetro de una bola de acero se ha estimado en 10 cm con un error máximo de 0.1 cm. Calcula mediante diferenciales el error máximo cometido en el cálculo de:

a) La superficie, al usar la fórmula $S = 4\pi r^2$.

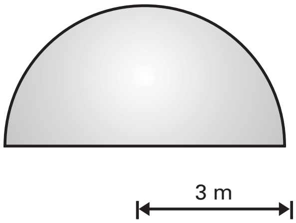
b) El volumen, mediante la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

R. *a*) $4\pi\,\text{cm}^2$

b) $10\pi\,\text{cm}^3$



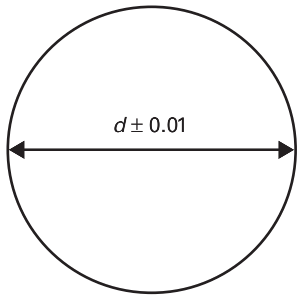
4. Se desea recubrir una cúpula semiesférica de 3 metros de radio con una capa de pintura de 0.03 cm de grosor. El contratista de la obra quiere saber cuántos litros de pintura necesitará, obteniendo una estimación mediante diferenciales. En otras palabras, la cuestión es encontrar la variación del volumen de la semiesfera ($dV = ?$).



5. Supongamos que la Tierra es una esfera de 640 kilómetros de radio. Se estima que el volumen de hielo en los polos Norte y Sur es de 33 millones de kilómetros cúbicos. Pensemos que ese hielo se derrite y el agua líquida resultante se distribuye de manera uniforme sobre su superficie. Estima la profundidad del agua añadida en cualquier punto de la Tierra.

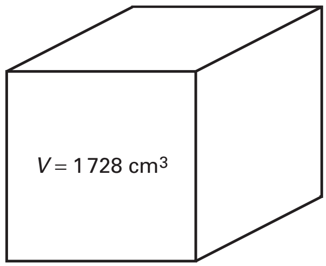
R. 6411.27 m

6. Se desea calcular el área de un círculo midiendo su diámetro. ¿Qué precisión necesitamos en la medida del diámetro si queremos un margen de error máximo de 1%?



7. Se desea construir una caja cúbica de 1 728 centímetros cúbicos. Utiliza diferenciales para estimar con qué precisión se debe fabricar, de manera tal que el volumen tenga un margen de error inferior a 0.3%.

R. $dx = 0.012$



8. La utilidad P de un negocio viene dada por $P = 400x - x^2 - \left(\frac{1}{8}x^2 - 60x + 30\right)$.

Estima en porcentaje el cambio en la utilidad cuando la producción cambia de $x = 100$ a $x = 104$ unidades.

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 1

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

¿Al finalizar el bloque adquiriste las habilidades metacognitivas que te permiten	
• definir el concepto de diferencial?	
• interpretar gráficamente la diferencial?	
• calcular la diferencial de una función a partir de su derivada?	
• calcular el error obtenido en un proceso mediante la aplicación de la diferencial?	
• comprender la importancia del concepto de diferencial para determinar tolerancias de los procesos?	
• construir modelos matemáticos de situaciones reales para medir errores?	
• utilizar la diferencial para el cálculo numérico de raíces?	
• comparar el concepto de incremento con el concepto de diferencial?	
• confiar en la precisión que tiene la diferencial al momento de hacer estimaciones?	
• aplicar las diferenciales en situaciones de la vida cotidiana?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste. Tu calificación va de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

BLOQUE 2

Integral indefinida

La abertura acústica del violín tiene la forma del signo que representa una integral.

Desempeños del estudiante al concluir el bloque

- Determina la primitiva de una función, como antecedente de la integral, en el campo de las ciencias exactas, naturales y sociales.
- Obtiene integrales indefinidas de funciones algebraicas y trascendentes, en un contexto teórico, como herramienta en la resolución de problemas reales.

Objetos de aprendizaje

- Funciones primitivas.
- Integral indefinida.

Competencias a desarrollar

- Resuelve problemas que involucren la obtención de la primitiva de una función y la interpreta en situaciones reales.
- Desarrolla la habilidad en el manejo de técnicas de integración en un contexto teórico.
- Valora el trabajo en equipo como una alternativa para mejorar sus habilidades operacionales en el cálculo de integrales indefinidas.

Actividades de enseñanza

- Solicitar al alumno realizar la lectura del tema de la **integral indefinida-función primitiva** en cualquier libro de cálculo, y ver un video sobre funciones primitivas en la red.
- Realizar una presentación multimedia para resaltar la importancia de aprender a calcular primitivas en problemas de las ciencias exactas, naturales y sociales. Organizar equipos de cuatro alumnos y proponer ejercicios de funciones derivadas para encontrar su primitiva.
- Organizar al grupo en binas, solicitar a los alumnos analizar los problemas resueltos de primitivas en alguna dirección de Internet. Cada bina seleccionará un problema diferente para explicarlo en clase.
- Proponer ejercicios teórico-prácticos donde se apliquen las integrales inmediatas y las diferentes técnicas de integración (por partes, por sustitución trigonométrica, descomposición en fracciones parciales). Crear un blog donde los alumnos expongan sus dudas, aportaciones, comentarios y sugerencias.

Actividades de aprendizaje

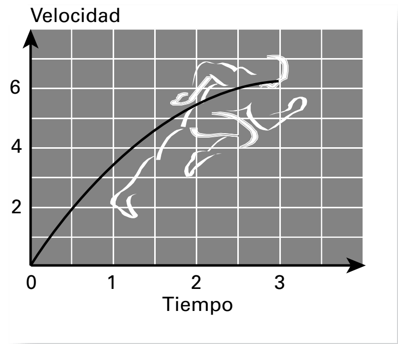
- Construir el concepto de función primitiva con base en la lectura realizada y el video consultado, socializarlo en tríadas y exponerlo al grupo.
- Analizar e interpretar la función primitiva como la antiderivada de una función, su notación, y al cálculo integral como el proceso inverso del cálculo diferencial en problemas de ciencias exactas (área bajo una curva), naturales (crecimientos exponenciales) y sociales (oferta y demanda), manifestar su opinión de forma escrita mediante una reflexión, después de resolver los ejercicios propuestos.
- Explicar el procedimiento algorítmico del problema escogido y lo manda por correo al docente.
- Resolver ejercicios de manera individual sobre integrales inmediatas y técnicas de integración; y para adquirir habilidad operativa en un contexto teórico, comentar al grupo los obstáculos que encontraron al integrar funciones, y dar sugerencias para identificar el tipo de técnica a aplicar de acuerdo con la forma de la función.

Antecedente de la integral

Desarrolla tus competencias

a) La gráfica de la figura corresponde a la velocidad de un deportista en una carrera. Utilízala para completar las celdas en blanco de la siguiente tabla, estimando el valor de la velocidad cada medio segundo durante los tres primeros.

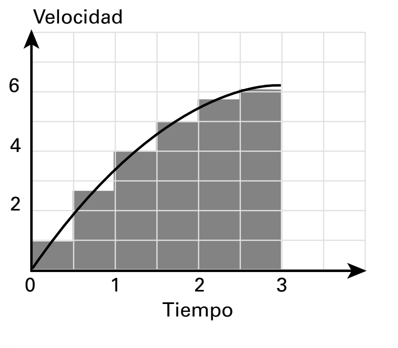
Tiempo (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Velocidad (m/s)							



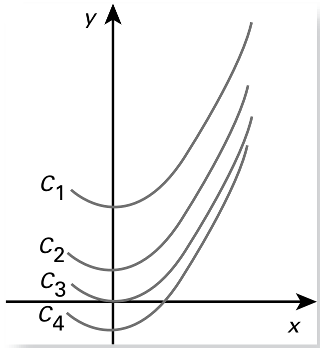
b) Con las velocidades que estimaste, continúa de la misma manera encontrando la distancia que recorrió durante esos tres primeros segundos. (Para cada intervalo de 0.5 segundos puedes estimar la distancia multiplicando *velocidad* × *tiempo*).

Tiempo (s)	0-0.5	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5	2.5-3.0
Distancia (m)						

c) Estima el área de cada rectángulo, suma cada una de éstas y concluye si se aproxima a la distancia recorrida del inciso *b*).



Función primitiva o antiderivada



Sabemos que en matemáticas las operaciones tienen sus inversas; por ejemplo, la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, elevar a una potencia y extraer una raíz, etcétera.

En el cálculo integral sucede exactamente lo mismo; la integración es una operación inversa a la derivación.

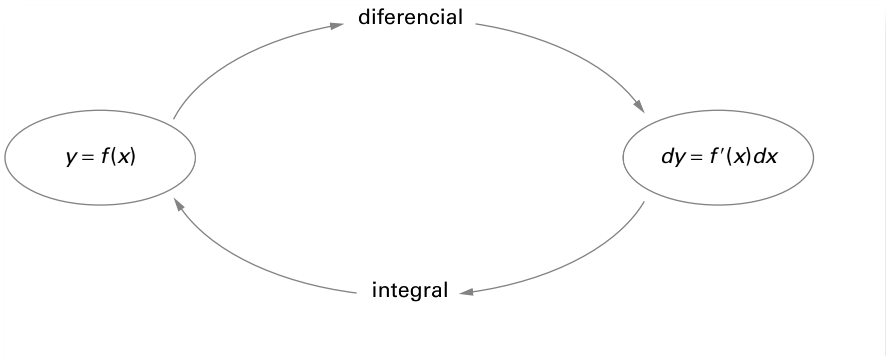
En el cálculo diferencial aprendimos que si $y = f(x)$, entonces la derivada de la función es $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; o bien si empleamos diferenciales, la de la función es:

$$dy = f'(x)\,dx \qquad \text{(definición de diferencial)}$$

El problema fundamental del **cálculo integral** depende de la operación inversa a la diferenciación, es decir:

> Hallar una **función primitiva** $y = f(x)$, cuya diferencial $dy = f'(x)\,dx$ es conocida.

Podemos resumir lo que se acaba de exponer con la siguiente ilustración:



La condición que debe caracterizar a *dy* para que admita la función primitiva sobre un intervalo es que debe tener continuidad en el intervalo.

La función primitiva $f(x)$ que así se obtiene se llama **integral o antiderivada** de la expresión diferencial dada; el procedimiento para hallarla se llama **integración** y la operación se indica escribiendo el signo integral $\int$ delante de la expresión diferencial; de manera que:

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

Ejemplos

Función	Diferencial	Integral
1. $y = x^3$	$dy = 3x^2 dx$	$\int 3x^2 dx = x^3$
2. $y = e^x$	$dy = e^x dx$	$\int e^x dx = e^x$
3. $y = \ln x$	$dy = \frac{1}{x} dx$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

Significado geométrico de la constante de integración

Cuando se integra una diferencial dada, lo que realmente se está obteniendo es una familia de funciones de la forma $f(x) + C$, donde C se denomina *constante de integración*; y es una *constante arbitraria* porque se le puede asignar cualquier valor real; a continuación veremos por qué:

Como $d(x^2) = 2xdx$, entonces,

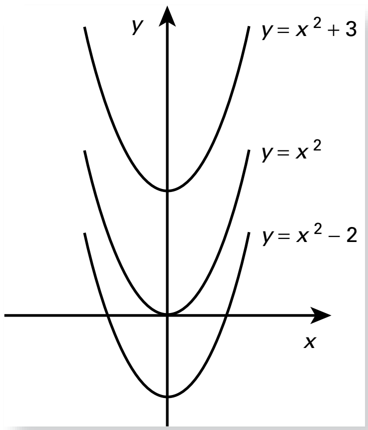
$$\int 2xdx = x^2$$

Como $d(x^2 + 3) = 2xdx$ entonces,

$$\int 2xdx = x^2 + 3$$

Como $d(x^2 - 2) = 2xdx$ entonces,

$$\int 2xdx = x^2 - 2$$



En general, como:

$$d\left[f(x) + C\right] = f'(x)dx$$

donde C es una constante arbitraria, tenemos que:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

se llama **integral indefinida** y C **constante de integración**.

En general, cada diferencial proporciona una fórmula de integral inmediata. En la tabla siguiente se listan las primeras **integrales o antiderivadas** que utilizaremos en esta sección, y que se pueden comprobar derivando el resultado de cada una de ellas.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS (algebraicas y trigonométricas – primera parte)	
1. $\int dx = x + C$	**2.** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	**4.** $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
5. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	**6.** $\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	**8.** $\int \csc x \operatorname{ctg} x dx = -\csc x + C$

Las siguientes propiedades de las integrales se llaman de linealidad y deben ser tomadas en cuenta al momento de integrar una diferencial:

a) $\int cf'(x)\ dx = c\int f'(x)\ dx,$ donde c es una constante.

b) $\int \left[f'(x) + g'(x)\right] dx = \int f'(x)\ dx + \int g'(x)\ dx$

c) $\int \left[af'(x) + bg'(x)\right] dx = a\int f'(x)\ dx + b\int g'(x)\ dx,$ donde a y b son constantes.

Ejemplos

1. Calcular:

$$\int 3dx$$

Solución
Deseamos encontrar una función cuya diferencial es $3dx$:

$$\int 3dx = 3\int dx = 3x + C$$

Aplicando la primera integral inmediata y la primer regla de linealidad.

2. Calcular:

$$\int x^5 dx$$

Solución

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

Porque $n = 5$, y aplicando la regla número 2 de la tabla anterior.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

3. Hallar el valor de:

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx$$

Solución

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx$$ Reescribiendo la raíz cúbica.

$$= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C$$ $n = 1/3$ y $n+1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$

$$= \frac{3}{4}x^{4/3} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$$

4. Hallar el valor de:

$$\int 3x^5\,dx$$

Solución

$$\int 3x^5\,dx = 3\int x^5\,dx$$

$$= 3\left(\frac{x^6}{6}\right) + C$$ Utilizando la regla número 2.

$$= \frac{1}{2}x^6 + C$$ Simplificando

5. Calcular:

$$\int \frac{5dx}{x^3}$$

Solución

$$\int \frac{5dx}{x^3} = 5\int x^{-3}dx$$ Reescribiendo la expresión.

$$= 5\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C = -\frac{5}{2x^2} + C$$

6. Calcular:

$$\int \left(3x^3 + 4x^2 - 2x + 5\right) dx$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \left(3x^3 + 4x^2 - 2x + 5\right) dx &= \int 3x^3 dx + \int 4x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx \\ &= 3\int x^3 dx + 4\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx \\ &= 3\left(\frac{x^4}{4}\right) + 4\left(\frac{x^3}{3}\right) - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5x + C \\ &= \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

7. Calcular:

$$\int \left(x-3\right)^2 dx$$

Solución

$$\int \left(x-3\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 6x + 9\right) dx$$ Elevando el binomio al cuadrado.

$$\begin{aligned}&= \int x^2 dx - 6\int x dx + 9\int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C\end{aligned}$$

8. Calcular:

$$\int \frac{2x^3 - 3x}{x} dx$$

Solución

$$\int \frac{2x^3 - 3x}{x} dx = 2\int x^2 dx - 3\int dx$$ Dividiendo todo entre x y separando términos.

$$\begin{aligned}&= 2\left(\frac{x^3}{3}\right) - 3x + C \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 3x + C\end{aligned}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

9. Calcular:

$$\int\left(5x^{3/2}-2\csc^2 x\right)dx$$

Solución

$$\int\left(5x^{3/2}-2\csc^2 x\right)dx=5\int x^{3/2}dx-2\int \csc^2 x dx$$

$$=5\frac{x^{5/2}}{5/2}-2(-\cot x)+C$$ Utilizando las reglas 2 y 6.

$$=5\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)+2\cot x+C$$

$$=2\sqrt{x^5}+2\cot x+C$$

Evidencias de aprendizaje

Encuentra la función primitiva o antiderivada de cada una de las siguientes expresiones, completando la propuesta sugerida. Comprueba tu respuesta por derivación.

Expresión	Antiderivada
1. $\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx =$	$\frac{3}{5}x^5 + C$
2. $\int \frac{2}{x^5} dx = 2\int x^{-5} dx =$	

3. $\int 5\sqrt{x^3}\,dx = 5\int x^{\frac{3}{2}}dx =$	$2\sqrt{x^5} + C$
4. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx =$	
5. $\int 4ay^3 dy =$	$ay^4 + C$
6. $\int \left(ax^2 + b\right)\, dx = a\int x^2 dx + b\int dx =$	
7. $\int \left(x^3 - \sqrt{x} + 2\right) dx =$	$\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2x + C$

8. $\int (1-x)^2\, dx =$ (*Sugerencia:* elevar el binomio al cuadrado y enseguida integrar.)	
9. $\int \frac{2t^7-3}{t^5}\, dt =$ (*Sugerencia:* dividir entre t^5 antes de integrar.)	$\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{4t^4} + C$
10. $\int (\sec^2 x - x^2)\, dx =$	
11. $\int (t+2)(t-2)\, dt =$	$\frac{1}{3}t^3 - 4t + C$
12. $\int x(\sqrt{x}-2)\, dx =$	

13. $\int \frac{\left(x+2\sqrt{x}\right)\left(x-2\sqrt{x}\right)}{x}\,dx =$	$\frac{1}{2}x^2 - 4x + C$

Valor de la constante de integración y condiciones iniciales

Las condiciones iniciales para determinar el valor de la constante de integración C son datos adicionales a la integral que queremos resolver. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplos

1. Hallar $f(x)$ sabiendo que:

$$f'(x) = x^3 + 2 \quad \text{y} \quad f(0) = 1$$

Solución
Lo que se tiene que hacer primero es calcular $f(x) = \int (x^3 + 2)\; dx$ para cualquier valor de la constante C:

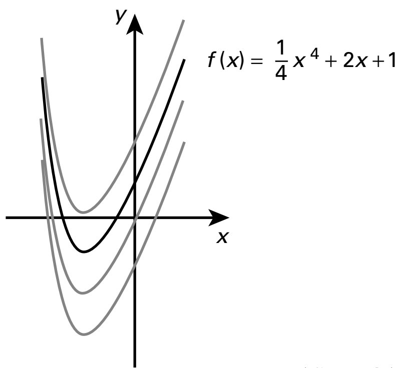
$$f(x) = \int (x^3 + 2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

Para conocer el valor de C utilizaremos las condiciones iniciales, es decir, cuando $f(0) = 1$;

$$f(0) = \frac{1}{4}(0)^4 + 2(0) + C = 1$$

De esta última expresión se obtiene que $C = 1$. Por tanto la función $f(x)$ buscada es:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + 1$$



La gráfica muestra algunas funciones de la familia

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

2. Hallar $f(x)$ a partir de $f'(x)=2x+1$ y $f(2)=4$. Comprobar el resultado comparando las gráficas de $f'(x)$ y $f(x)$.

Solución

Se busca la antiderivada general de $f'(x)=2x+1$

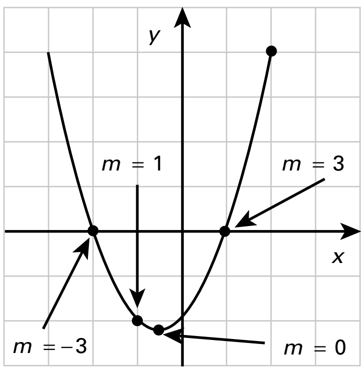
$$\int(2x+1)\,dx = x^2+x+C$$

Enseguida se evalúa la función encontrada en $x=2$

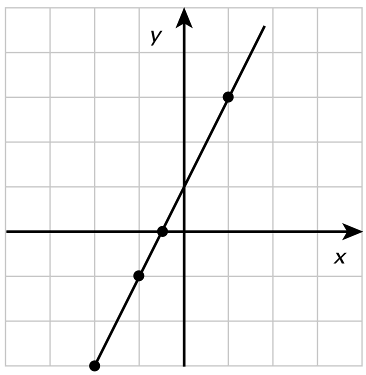
$$f(2)=(2)^2+2+C=4$$
$$4+2+C=4$$
$$C=4-6=-2 \qquad \text{Se despeja } C.$$

La función buscada es $f(x)=x^2+x-2$.

Si se comparan las gráficas siguientes se puede comprobar que cada ordenada de $f'(x)$ corresponde al valor de la pendiente de $f(x)$ en cada punto de ésta.



$f(x)=x^2+x-2$



$f'(x)=2x+1$

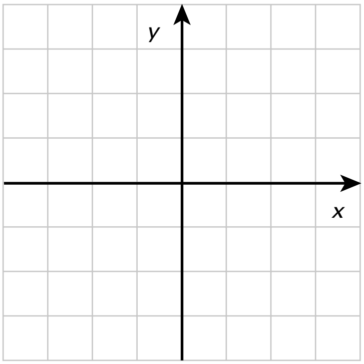
Evidencias de aprendizaje

1. Encuentra $f(x)$ a partir de las condiciones dadas y comprueba tu respuesta trazando la gráfica de $f(x)$.

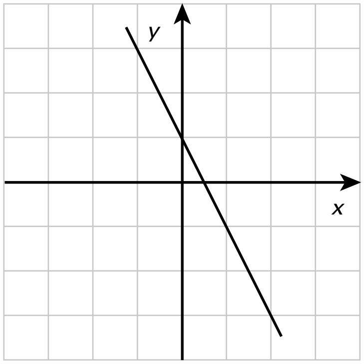
R. *a*) $f(x)=x-x^2+3$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+1$

a) $f'(x) = 1 - 2x$ si $f(1) = 3$

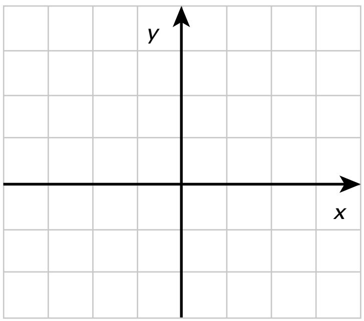


$f(x)$

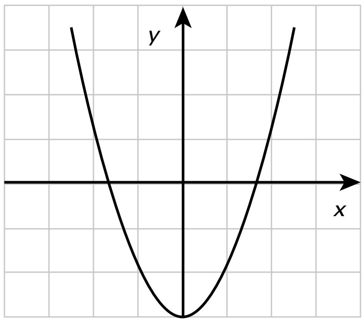


$f'(x) = 1 - 2x$

b) $f'(x) = x^2 - 3$ si $f(0) = 1$



$f(x)$



$f(x)\ 0\ x^2 - 3$

2. Encuentra $f(x)$ a partir de las condiciones dadas a continuación.

Condiciones	Función primitiva
1. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y $f(0) = 3$	$f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$

2. $f'(x) = \cos x$ y $f(0) = 1$	
3. $f'(x) = \sec^2 x$ y $f(0) = 3$	$f(x) = \tan x + 3$
4. $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$ y $f(2) = 1$	
5. $f'(x) = 2 - 3x^2$ y $f(1) = 5$	$f(x) = 2x - x^3 + 4$

Aplicaciones

Las condiciones preliminares de un proceso nos sirven para conocer la posición inicial de una partícula en movimiento, el inventario de un negocio, los costos fijos, el número de bacterias al comenzar un experimento, etcétera.

Ejemplos

1. Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con una velocidad de:

$$v = 3t^2 - 2 \text{ unidades por segundo.}$$

Cuando $t = 0$, su posición inicial es de 2 unidades a la derecha del origen. Hallar la posición después de 2 segundos.

Solución

Sea $s(t)$ la posición del objeto en cualesquier instante. Sabemos que la velocidad v del objeto es:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad \text{por tanto,} \quad ds = vdt = (3t^2 - 2)\,dt$$

La posición del objeto en cualesquier instante t es:

$$s(t) = \int (3t^2 - 2)\,dt = t^3 - 2t + C$$

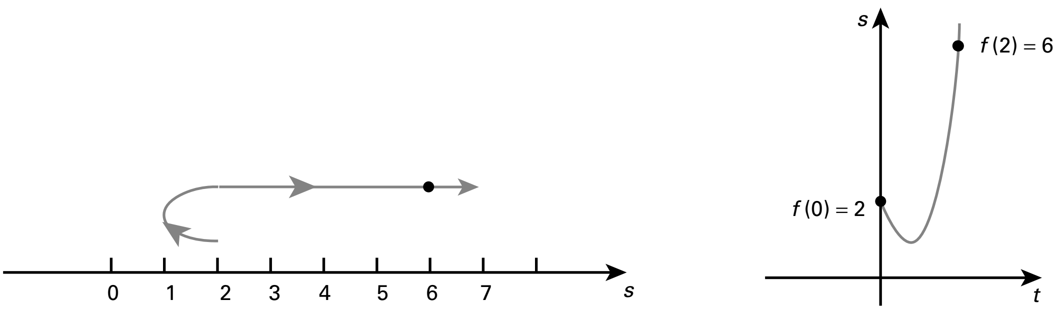
Luego, si $s(0) = 2$, entonces $s(0) = (0)^3 - 2(0) + C = 2$, de donde $C = 2$, y

$$s(t) = t^3 - 2t + 2$$

La posición del objeto en el instante $t = 2$ segundos es:

$$s(2) = (2)^3 - 2(2) + 2 = 6 \text{ unidades,}$$

significa que pasados 2 segundos el objeto se encuentra a 6 unidades a la derecha del origen.



Esquema del movimiento del objeto

(*Continúa*)

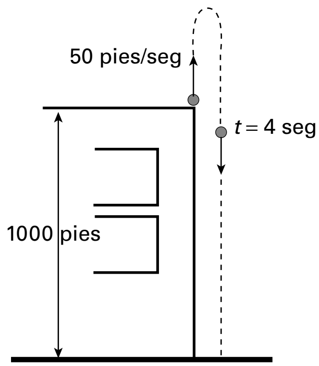
(*Continuación*)

2. Si se arroja un objeto hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, con una velocidad de 50 pies por segundo, encuentra la velocidad y la altura después de 4 segundos.

Solución

Sabemos que la aceleración en un movimiento vertical es de -32 pies/seg^2 y que es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Por tanto,

$$g = \frac{dv}{dt} = -32, \quad \text{y} \quad dv = -32dt$$



entonces el valor de la velocidad en cualquier tiempo t es:

$$v = \int -32dt = -32t + C_1$$

pero la velocidad inicial es 50 pies/seg, cuando $t = 0$,

luego $v(0) = -32(0) + C_1 = 50$ de donde $C_1 = 50$.

La velocidad en cualesquier instante viene dada por:

$$v = -32t + 50$$

Después de 4 segundos el objeto lleva una velocidad de $v = -32(4) + 50 = -78$ pies/seg.

Sea $s(t)$ la posición del objeto en cualquier instante; además de que su velocidad es precisamente la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{entonces} \quad ds = vdt = (-32t + 50)dt$$

Entonces la función de posición buscada es:

$$s(t) = \int (-32t + 50)\,dt = -16t^2 + 50t + C_2$$

como $s(0) = 1000$, tenemos que $s(0) = -16(0)^2 + 50(0) + C_2 = 1000$, de donde $C_2 = 1000$.

La ecuación que describe la posición de la trayectoria es:

$$s(t) = -16t^2 + 50t + 1000$$

Finalmente calculamos la posición $s(t)$ para un tiempo de 4 segundos:

$$s(4) = -16(4)^2 + 50(4) + 1000 = 944 \text{ pies}$$

3. Una población es atacada por una epidemia de gripe. Sea $N(t)$ el número de personas enfermas al tiempo t medido en días, cuando inicia la epidemia $N(0)=100,$ y un matemático determina que la gripe se está extendiendo a razón de $120t-3t^2$ personas por día $\left(\dfrac{dN}{dt}\right)$. Hallar cuántos enfermos habrá después de 10 días si no se controla la epidemia.

Solución

Como $\dfrac{dN}{dt}=120t-3t^2;$ tenemos que hallar el valor de $N(t)$ integrando la razón de cambio $120t-3t^2$:

$$\int\left(120t-3t^2\right)dt=60t^2-t^3+C$$

Cuando $t=0,$ $N(0)=100$ entonces $60(0)^2-(0)^3+C=100$ de donde $C = 100$.

El número de personas enfermas en un tiempo t es:

$$N(t)=60t^2-t^3+100$$

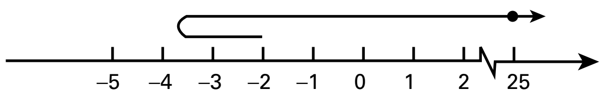
Cuando pasen 10 días, si la epidemia no se controla, habrá:

$$N(10)=60(10)^2-(10)^3+100=5100 \text{ enfermos.}$$

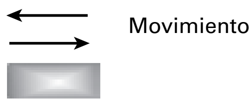
Evidencias de aprendizaje

1. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con una velocidad de $v=4t^2-3$ unidades por segundo. Su posición en el instante $t=0$ es 2 unidades a la izquierda del origen. Hallar la posición del objeto 3 segundos más tarde.

R. 25 unidades a la derecha



2. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con una velocidad de $v=2t-t^2$ unidades por segundo. Su posición en el instante $t=0$ es 3 unidades a la derecha del origen. Hallar la posición del objeto 3 segundos más tarde.

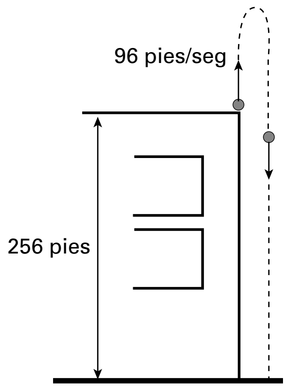


3. Una pelota es lanzada hacia arriba desde una altura de 256 pies sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. Si se sabe que la velocidad al tiempo t es de $v = 96 - 32t$ pies por segundo:

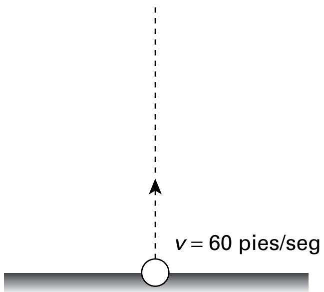
a) Encuentra $s(t)$ la función que da la altura de la pelota al tiempo t.

b) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al piso?

R. *a*) $256 + 96t - 16t^2$
b) $t = 8s$



4. Una pelota es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Cuánto ascenderá? Considera que la aceleración del objeto es $g = \frac{dv}{dt} = -32$ y que la velocidad en cualesquier instante es $v = \frac{ds}{dt}$.

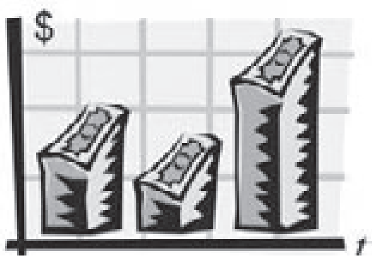


5. Una mina de carbón está produciendo carbón a razón de $40 + 2t - \frac{1}{6}t^2$ toneladas por hora. Encuentra una fórmula que describa la **producción total** de la mina después de t horas de operación.

R. $40t + t^2 - \frac{1}{18}t^3 + C$

6. **Costo total.** Un fabricante de un producto de limpieza estima que la variación de su costo (costo marginal) por fabricar el producto es $0.2x + 1$ en cientos de dólares a un nivel de producción de x toneladas diarias. Los costos fijos son de 200 dólares diarios. Encuentra el costo de fabricar x toneladas del producto diarias.

*Los economistas le llaman **costo marginal** a la derivada del costo total.*



7. **Ingreso total.** Un fabricante de joyas determina que el ingreso marginal $R'(x)$ en dólares asociado con su producción y venta de x joyas es:

$$R'(x) = 85 - x$$

a) Hallar el *ingreso total* por la venta de x joyas.

b) ¿Cuál es el ingreso total para un nivel de producción de 30 artículos si $R(0) = 0$?

R. *a*) $85x - \frac{1}{2}x^2 + C$
b) 2100 dólares

8. **Utilidad total.** El fabricante de joyas del ejercicio anterior ha encontrado que la utilidad marginal en dólares asociada con la producción y venta de x joyas es:

$$P'(x) = 70 - x$$

Hallar la *utilidad total* por la venta de x joyas si se sabe que $P(0) = -1000$.

Cambio de variable, regla de sustitución o regla de la cadena

Cuando tenemos que integrar una diferencial, producto de una función compuesta, es conveniente hacer un cambio de variable para que se nos facilite el proceso de integración.

En una integral de la forma:

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx$$

si hacemos $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$, entonces la integral se puede escribir como:

$$\int f(u)\,du$$

y si $F(u) + C$ es la antiderivada de la expresión anterior podemos concluir que:

$$\int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Ejemplos

1. Calcular:

$$\int \left(x^2+3\right)^5 2x\,dx$$

Solución
Hagamos:

$$u = x^2 + 3 \quad \text{luego} \quad du = 2x\,dx$$

Entonces:

$$\int \left(x^2+3\right)^5 2x\,dx = \int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 + C$$

$$= \frac{1}{6}\left(x^2+3\right)^6 + C \qquad \text{Sustituyendo } u \text{ por } x^2 + 3$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{6}\left(x^2+3\right)^6+C\right]=\frac{6}{6}\left(x^2+3\right)^5\left(2x\right)=\left(x^2+3\right)^5 2x$$

En los siguientes ejemplos dejamos al estudiante la comprobación como ejercicios.

2. Calcular:

$$\int 2\,\mathrm{sen}\left(2x-3\right)dx$$

Solución
Hagamos:

$$u=2x-3,\quad \text{luego}\quad du=2dx$$

Entonces:

$$\int 2\,\mathrm{sen}\left(2x-3\right)dx=\int \mathrm{sen}\,udu=-\cos u+C$$

$$=-\cos\left(2x-3\right)+C \qquad \text{Sustituyendo } u \text{ por } 2x-3$$

3. Calcular:

$$\int \mathrm{sen}\,x\cos xdx$$

Solución
Hagamos:

$$u=\mathrm{sen}\,x,\quad \text{luego}\quad du=\cos xdx$$

Entonces:

$$\int \mathrm{sen}\,x\cos xdx=\int udu=\frac{1}{2}u^2+C$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2x+C \qquad \text{Sustituyendo } u \text{ por sen } x$$

4. Calcular:

$$\int\frac{dx}{\left(2+3x\right)^3}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Solución

Hagamos:

$$u = 2 + 3x, \quad \text{luego} \quad du = 3dx \quad \text{y} \quad dx = \frac{1}{3}du$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{(2+3x)^3} = \int \frac{\frac{1}{3}du}{u^3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-3}du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{6u^2} + C = -\frac{1}{6(2+3x)^2} + C \quad \text{Sustituyendo } u \text{ por } 2 + 3x$$

5. Calcular:

$$\int x^2\sqrt{2+x^3}\,dx$$

Solución

Hagamos:

$$u = 2 + x^3, \quad \text{luego} \quad du = 3x^2dx$$

Entonces podemos ver que $\frac{1}{3}du = x^2dx$; por tanto,

$$\int x^2\sqrt{2+x^3}\,dx = \int \frac{1}{3}u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}\left(2+x^3\right)^{3/2} + C \qquad \text{Sustituyendo } u \text{ por } 2 + x^3$$

6. Calcular:

$$\int 2x^2\sec^2\left(x^3+1\right)dx$$

Solución
Hagamos:

$$u = x^3 + 1, \quad \text{luego} \quad du = 3x^2 dx \quad \text{y} \quad \frac{du}{3} = x^2 dx$$

Entonces:

$$\int 2x^2 \sec^2\left(x^3+1\right) dx = \int 2\sec^2 u\left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{2}{3}\tan u + C$$

$$= \frac{2}{3}\tan u + C = \frac{2}{3}\tan\left(x^3+1\right) + C$$

7. Calcular:

$$\int \sec^3 x \tan x dx$$

Solución

$$\int \sec^3 x \tan x dx = \int \sec^2 x\left(\sec x \tan x\right) dx$$

$$= \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

Haciendo $u = \sec x$ luego $du = \sec x \tan x dx$.

La tabla siguiente es semejante a la primera colección de reglas que se vio en la sección pasada, pero indica el cambio de variable en la integral original en la forma $\int f\left(u\right) du$.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS (algebraicas y trigonométricas – segunda parte)	
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	
$\int \text{sen } u du = -\cos u + C$	$\int \cos u du = \text{sen } u + C$
$\int \sec^2 u du = \tan u + C$	$\int \csc^2 u du = -\text{ctg } u + C$
$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$	$\int \csc u \text{ ctg } u du = -\csc u + C$

Evidencias de aprendizaje

Calcula las siguientes integrales utilizando la regla de sustitución.

Integral	Solución
1. $\int (2x-3)^3\,dx$ (*Sugerencia:* hacer $u = 2x-3$)	$\frac{1}{8}(2x-3)^4 + C$
2. $\int \sqrt{2x-3}\,dx$	
3. $\int \frac{dx}{(2x+1)^3}$	$-\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$
4. $\int (a+bx)^2\,dx$	

5. $\int \sqrt{x^2 - 3}\, xdx$	$\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 - 3\right)^3} + C$
6. $\int t\left(2 - 3t^2\right)^2 dt$	
7. $\int y\left(3 - 3y\right)^2 dy$. (*Sugerencia:* elevar el binomio al cuadrado y multiplicar por y.)	$\frac{9}{2}y^2 - 6y^3 + \frac{9}{4}y^4 + C$
8. $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{4 - x^3}}$	
9. $\int \frac{6xdx}{\left(2 - 3x^2\right)^3}$	$\frac{1}{2\left(2 - 3x^2\right)^2} + C$

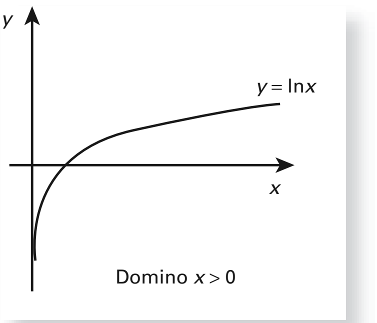
10. $\int \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx$	
11. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4-4}}$	$\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^4-4\right)^2}+C$
12. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}\,dx$	
13. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x}+C$
14. $\int \cos\left(3x+1\right)dx$	

15. $\int \operatorname{sen} \pi x dx$	$-\frac{1}{\pi}\cos \pi\ x + C$
16. $\int \csc^2 \left(x+1\right) dx$	
17. $\int \sec 2x \tan 2x dx$	$\frac{1}{2}\sec 2x + C$
18. $\int \tan x \sec^2 x dx$	
19. $\int \frac{\cos ay}{\sqrt{1-\operatorname{sen}\ ay}} dy$	$-\frac{2}{a}\sqrt{1-\operatorname{sen}\ ay} + C$

20. $\int (1+\tan x)\sec^2 x dx$	
21. $\int x\sec^2 x^2 dx$	$\frac{1}{2}\tan x^2 + C$
22. $\int \tan(1-3x)\sec^2(1-3x)dx$	

Integral de la función logaritmo natural

La función $y = \ln x$ cuya derivada es $\frac{1}{x}$ para toda $x > 0$ se denomina función **logaritmo natural** y tiene como base el número $e \approx 2.7182$.



Gráfica de la función logaritmo natural

Las integrales de la forma:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx \quad \text{pueden reducirse a la forma} \quad \int \frac{du}{u}$$

si hacemos la siguiente sustitución:

$$u = g(x) \quad \text{y} \quad du = g'(x)dx$$

y como $\frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u}$, o bien si empleamos diferenciales $d(\ln u) = \frac{du}{u}$, es claro que:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C, \qquad u \neq 0$$

Ejemplos

1. Calcular:

$$\int \frac{dx}{2-3x}$$

Solución
Hagamos $u = 2 - 3x$, entonces $du = -3dx$, luego $-\frac{1}{3}du = dx$. Por tanto,

$$\int \frac{dx}{2-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3}\ln u + C = -\frac{1}{3}\ln(2-3x) + C$$

2. Resolver:

$$\int \frac{x^2dx}{ax^3-b}$$

Solución
Hagamos $u = ax^3 - b$, entonces $du = 3ax^2dx$, luego $\frac{1}{3a}du = x^2dx$. Por tanto,

$$\int \frac{x^2dx}{ax^3-b} = \int \frac{\frac{1}{3a}du}{u}$$

$$= \frac{1}{3a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3a}\ln u + C = \frac{1}{3a}\ln(ax^3-b) + C$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

3. Calcular:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$$

Solución

Hagamos $u = x^2 + 3x$, entonces $du = (2x+3)dx$. Por tanto,

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C$$
$$= \ln(x^2+3x) + C$$

4. Resolver:

$$\int \frac{\sec^2 x}{a+b\tan x}\,dx$$

Solución

Hagamos $u = a + b \tan x$, entonces $du = b\sec^2 x dx$ y $\frac{1}{b}du = \sec^2 xdx$. Por tanto,

$$\int \frac{\sec^2 x}{a+b\tan x}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{b}\ln u + C = \frac{1}{b}\ln(a+b\tan x) + C$$

Evidencias de aprendizaje

Calcula las siguientes integrales utilizando la regla de sustitución.

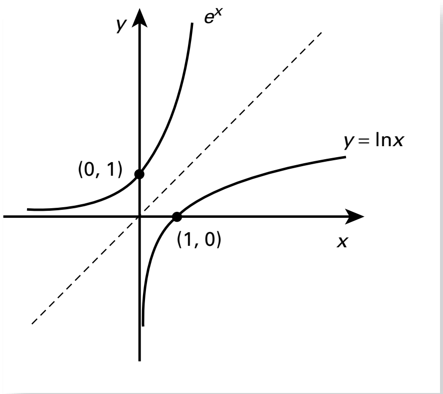
Integral	Solución
1. $\int \frac{t}{2t^2+3}\,dt$	$\frac{1}{4}\ln(2t^2+3)+C$

2. $\int \frac{y-2}{y^2-4y}\,dy$	
3. $\int \frac{\text{sen}\ t}{1-\cos t}\,dt$	$\ln\left(1-\cos t\right)+C$
4. $\int \frac{e^x}{a+be^x}\,dx$	
5. $\int \frac{2x+3}{x+2}\,dx$ (*Sugerencia:* hacer primero la división.)	$2x-\ln\left(x+2\right)+C$
6. $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$ (*Sugerencia:* hacer primero la división.)	

7. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+C$
8. $\int \frac{x^2\,dx}{2x^3-1}$	
9. $\int \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx$	$-\ln\left(\operatorname{sen} x+\cos x\right)+C$
10. $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$	

Integral de la función exponencial

La función $y = e^x$ para toda x real recibe el nombre de *función exponencial* y es inversa a la *función logaritmo*.



Las integrales de la forma:

$$\int e^{g(x)} g'(x)\, dx \quad \text{pueden reducirse a la forma} \quad \int e^u du$$

y si realizamos un cambio de variable tenemos que:

$$u = g(x) \quad \text{y} \quad du = g'(x)\, dx$$

y como $\frac{d}{du}\left(e^u\right) = e^u$, o bien si empleamos diferenciales $d\left(e^u\right) = e^u du$ es claro que:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplos

1. Calcular:

$$\int e^{nx} dx$$

Solución
Hagamos $u - nx$, entonces $du = ndx$ y $\frac{du}{n} = dx$, por tanto,

$$\int e^{nx} dx = \frac{1}{n} \int e^u du = \frac{1}{n} e^u + C = \frac{1}{n} e^{nx} + C$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

2. Calcular:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución

Hagamos $u = \sqrt{x}$, entonces $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ y $2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$; por tanto,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{u}du = 2e^{u} + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

3. Calcular:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx$$

Solución

Asociemos esta integral con la forma $\int \frac{du}{u}$; entonces,

$$u = e^{3x}+1,\ du = 3e^{3x}dx \quad \text{y} \quad \frac{du}{3} = e^{3x}dx; \quad \text{por tanto,}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln u + C = \frac{1}{3}\ln\left(e^{3x}+1\right) + C$$

4. Hallar $f(x)$ a partir de que $f'(x) = e^{x}$, y $f(0) = 1$

Solución

Tenemos que calcular la integral de $f'(x) = e^{x}$ y luego evaluar la función en $x = 0$,

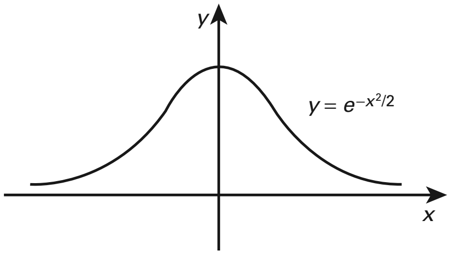
$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

luego $f(0) = e^{0} + C = 1$; de donde $C = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$, de manera que la función buscada es:

$$f(x) = e^{x}$$

5. Las integrales de la forma $\int x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx$ desempeñan un papel importante en la probabilidad y estadística, ya que representan una distribución normal. Integremos pues la expresión

$$\int x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx \quad \text{para} \quad f(0)=1$$



Solución

Hagamos $u=-\frac{1}{2}x^2 \quad du=-xdx;$ por tanto,

$$\int x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx=-\int e^u(-du)=e^u+C$$

entonces $e^0+C=1$, de donde $C=0$. La función buscada es: $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

Evidencias de aprendizaje

Calcula las siguientes integrales utilizando la regla de sustitución:

Integral	Solución
1. $\int 2e^{3x}dx$	$\frac{2}{3}e^{3x}+C$

2. $\int 2e^{x^2} x dx$	
3. $\int \frac{3}{e^{2x}} dx$; para $f(0) = 3/2$	$-\frac{3}{2}e^{-2x} + 3$
4. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$	
5. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$; para $f(0) = 2$	$e^{\operatorname{sen} x} + 1$
6. $\int \sqrt{e^x} dx$	

7. $\int \frac{3dx}{\sqrt[3]{e^x}}$	$-\frac{9}{\sqrt[3]{e^x}}$
8. $\int \frac{\left(e^x - 3\right)dx}{e^x}$	
9. $\int \frac{e^x dx}{2 - e^x}$	$-\ln\left(2 - e^x\right) + C$
10. $\int \frac{x}{1 + x^2}\,dx$	
11. $\int x\left(3 - e^{x^2}\right)dx$	

12. $\int \frac{\left(e^{\sqrt{x}}-2\right)dx}{\sqrt{x}}$	$2e^{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}+C$
13. $\int \left(e^{2x}\right)^2 dx$	
14. $\int e^{ax+b}dx$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

Aplicaciones

Generalmente se elige la función exponencial e^x para resolver problemas de carácter exponencial, por la facilidad que existe para derivarla e integrarla.

Ejemplo

Crecimiento exponencial. La tasa mundial de consumo de petróleo al tiempo t es $16.1e^{0.07t}$ miles de millones de barriles anuales. Encuentra la cantidad total de petróleo que se consumió de 1990 $(t=0)$ al 2000 $(t=10)$.

Solución

Llamemos $C(t)$ el consumo total del tiempo 0 al tiempo *t*, entonces

$$C(t) = \int 16.1e^{0.07t}dt$$

$$= \frac{16.1}{0.07}\int e^{u}du = 230e^{u} + C$$

$$= 230e^{0.07t} + C$$

pero en el tiempo $t = 0$, $C(0) = 230e^{0} + C = 0$, quiere decir que $C = -230$.

Luego el consumo total para cualesquier tiempo es:

$$C(t) = 230e^{0.07t} - 230$$

En la década de 1990 al 2000 $t = 10$, entonces el consumo fue:

$$C(10) = 230e^{0.07(10)} - 230 \approx 233 \text{ miles de millones de barriles.}$$

Evidencias de aprendizaje

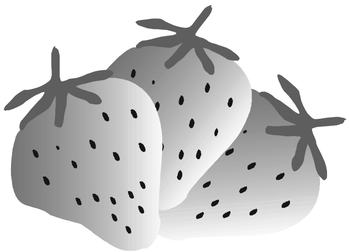
1. La tasa de producción de gas natural industrializado en Estados Unidos ha sido de $R'(t)$ millones de BTU anuales al tiempo *t*, donde $t = 0$ corresponde a 1976 y $R'(t) = 20e^{0.02t}$. Encuentra una fórmula que describa la producción total de gas natural industrializado de 1976 hasta el tiempo *t*.

R. $1000e^{0.02t} - 1000$

2. Estados Unidos ha consumido mineral de hierro a razón de $R'(t)$ millones de toneladas métricas anuales al tiempo t, donde $t = 0$ corresponde a 1980 y $R'(t) = 94e^{0.016t}$. Encuentra una fórmula que describa el consumo total del mineral hasta el tiempo t.

3. Un paquete de fresas congeladas se sacan de un congelador a -5^0C hacia una habitación a 20^0C. Al tiempo t la temperatura promedio de las fresas está cambiando a razón de $10e^{-0.4t}$ grados centígrados por hora. Encuentra la temperatura de las fresas al tiempo t.

R. $-25e^{-0.4t} + 20$



Integración de funciones trigonométricas

En secciones pasadas vimos que:

$\int \text{sen } u du = -\cos u + C$	$\int \cos u du = \text{sen } u + C$
$\int \sec^2 u du = \tan u + C$	$\int \csc^2 u du = -\text{ctg } u + C$
$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$	$\int \csc u \text{ ctg } u du = -\csc u + C$

Ahora que nos hemos familiarizado con la función logaritmo natural y la función exponencial, podemos agregar a la lista de integrales inmediatas cuatro fórmulas básicas más.

$\int \tan u du = \ln\lvert \sec u \rvert + C$	$\int \cot u du = \ln\lvert \operatorname{sen} u \rvert + C$
$\int \sec u du = \ln\lvert \sec u + \tan u \rvert + C$	$\int \csc u du = \ln\left[\csc u - \cot u \right] + C$

Ejemplos

1. Calcular:

$$\int \tan 2ax dx$$

Solución
Hacer:

$$u = 2ax, \quad du = 2adx \quad \text{y} \quad \frac{du}{2a} = dx$$

$$\int \tan 2ax dx = \frac{1}{2a} \int \tan u du$$

$$= \frac{1}{2a} \ln\lvert \sec u \rvert + C$$

$$= \frac{1}{2a} \ln\lvert \sec 2ax \rvert + C$$

2. Calcular:

$$\int \left(1 + \tan x\right)^2 dx$$

Solución
En esta integral la evidencia nos dice que debemos desarrollar el binomio primero y después buscar formas de integración:

$$\int \left(1 + \tan x\right)^2 dx = \int \left(1 + 2\tan x + \tan^2 x\right) dx \qquad \text{Elevando el binomio}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$$= \int \left(\underbrace{1 + \tan^2 x}_{\sec^2 x} + 2\tan x \right) dx \quad \text{Identifica la identidad}$$

$$= \int \left(\sec^2 x + 2\tan x \right) dx$$

$$= \int \sec^2 x dx + 2\int \tan x dx$$

$$= \tan x + 2\ln(\sec x) + C$$

Evidencias de aprendizaje

Calcula las siguientes integrales utilizando la regla de sustitución.

Integral	Solución
1. $\int \cos kx dx$	$\frac{1}{k} \text{sen } kx + C$
2. $\int \sec 2x dx$	
3. $\int \csc 2x \text{ ctg } 2x dx$	$-\frac{1}{2}\csc 2x + C$

4. $\int \csc^2 3x dx$	
5. $\int \frac{du}{\cos^2 u}$ (*Sugerencia:* utilizar $\sec^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$)	$\tan u + C$
6. $\int \left(\sec x - 1\right)^2 dx$ (*Sugerencia:* desarrollar primero el binomio.)	
7. $\int \left(\text{tg } x + \text{ctg } x\right)^2$	$\tan x - \text{ctg } x + C$
8. $\int \frac{du}{1 + \cos u}$ (*Sugerencia:* racionalizar el denominador.)	

Atención. Racionalizar una fracción cuyo denominador sea un binomio significa multiplicar y dividir la fracción por su conjugado; por ejemplo, si deseamos racionalizar $\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$ se procede de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}=\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Observa que los dos términos de la última expresión ya son fácilmente integrables.

Integración por partes

Cuando no podemos aplicar alguna de las formas de integración que hemos visto hasta aquí, podemos intentar **integrar por partes**. Ésta es una regla que resulta de la derivación del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ que dice lo siguiente:

Sean *u* y *v* funciones de *x*, entonces la diferencial de *u* por *v* es:

$$d(uv)=udv+vdu$$

y si trasponemos términos,

$$udv=d(uv)-vdu$$

luego, al integrar esta última expresión se puede escribir:

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

Las siguientes recomendaciones son significativas al momento de utilizar esta técnica de integración:

- *dx* siempre es una parte de *dv*.
- Debe ser posible integrar la parte *dv*.
- Es mejor elegir la parte que parece más complicada de integrar, como parte de *dv*, siempre y cuando sea integrable.

Ejemplo 1

Hallar: $\int x\cos x dx$

Solución

Hagamos: $u=x$ $\quad dv=\cos x dx$

Entonces:

$du=dx$ $\quad v=\int\cos x dx=\operatorname{sen} x$

Por tanto,

$$\int x\cos x dx = \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\text{sen } x}_{v} - \int \underbrace{\text{sen } x}_{v}\ \underbrace{dx}_{dv}$$

$$= x \text{ sen } x - \left(-\cos x\right) + C = x \text{ sen } x + \cos x + C$$

La elección de u y dv resultó un éxito, pero si hubiésemos elegido:

$$u = \cos x \qquad dv = xdx$$

$$du = -\text{sen } xdx \qquad v = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

La integración por partes sería entonces:

$$\frac{1}{2}x^2\cos x - \frac{1}{2}\int x^2\left(-\text{sen } x\right)dx$$

una integral más compleja que la inicial. Por eso es crucial una buena elección de u y dv.

Desarrolla tus habilidades

Resuelve correctamente cada una de las siguientes integrales, escribiendo en cada celda la parte correspondiente (observa la integral número 1).

Integral	Selección de las partes
1. $\int x\sec^2 xdx =$	$u = x$
	$du = dx$
	$dv = \sec^2 xdx$
	$v = \int \sec^2 xdx = \tan x$
Resultado	$x\tan x + \ln\left(\cos x\right) + C$

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">**2.** $\int x \text{ sen } 3x dx =$</td><td>$u =$</td></tr>
<tr><td>$du =$</td></tr>
<tr><td>$dv =$</td></tr>
<tr><td>$v =$</td></tr>
<tr><td>**Resultado**</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">**3.** $\int x\sqrt{x+1}dx =$</td><td>$u =$</td></tr>
<tr><td>$du =$</td></tr>
<tr><td>$dv =$</td></tr>
<tr><td>$v =$</td></tr>
<tr><td>**Resultado**</td><td colspan="2">$\frac{2}{3}x\sqrt{(x+1)^3}-\frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5}+C$</td></tr>
</table>

Ejemplo 2

Calcular:

$$\int x\ln(2x)\,dx$$

Solución

En una integral por partes, donde aparezca una *función logarítmica*, siempre debemos escoger a ésta como parte de u, ya que no tenemos ninguna forma elemental para integrar una función logarítmica.

$$u = \ln 2x \qquad dv = xdx$$

$$du = \frac{1}{2x}(2)\,dx = \frac{dx}{x} \qquad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln(2x)\,dx = \ln(2x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{dx}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(2x) - \frac{1}{2}\int xdx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(2x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Desarrolla tus habilidades

Resuelve correctamente cada una de las siguientes integrales:

Integral	Selección de las partes
1. $\int \ln 3xdx =$	$u =$
	$du =$
	$dv =$
	$v =$
Resultado	$x\ln 3x - x + C$

<table>
<tr><td rowspan="4">**2.** $\int \sqrt{t}\ln t dt =$</td><td>$u =$</td></tr>
<tr><td>$du =$</td></tr>
<tr><td>$dv =$</td></tr>
<tr><td>$v =$</td></tr>
<tr><td>**Resultado**</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">**3.** $\int x^n \ln x dx =$</td><td>$u =$</td></tr>
<tr><td>$du =$</td></tr>
<tr><td>$dv =$</td></tr>
<tr><td>$v =$</td></tr>
<tr><td>**Resultado**</td><td>$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$</td></tr>
</table>

Ejemplo 3

Hallar:

$$\int x \sec^{-1} x dx$$

Solución
Las funciones trigonométricas inversas, al igual que las logarítmicas, deben escogerse como parte de u:

$$u = \sec^{-1} x \qquad dv = xdx$$

$$du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \sec^{-1} xdx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1} x - \int\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1} x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\right)xdx$$

$$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1} x - \frac{1}{4}\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$$

Desarrolla tus habilidades

Resuelve correctamente cada una de las siguientes integrales.

Integral	Selección de las partes
1. $\int x \tan^{-1} xdx =$	$u =$
	$du =$
	$dv =$
	$v =$
Resultado	$\frac{1}{2}\left(x^2 \tan^{-1} x + \tan^{-1} x - x\right) + C$

2. $\int \sec^{-1} y \, dy =$	$u =$
	$du =$
	$dv =$
	$v =$
Resultado	
3. $\int \operatorname{sen}^{-1} x dx =$	$u =$
	$du =$
	$dv =$
	$v =$
Resultado	$x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$

Ejemplo 4

En algunas ocasiones la integración por partes se presenta más de una vez.

Hallar:

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

Solución
Hacemos:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{2x} dx$$

$$du = 2xdx \qquad v = \frac{1}{2}\int e^{2x}(2)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)(2xdx)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int xe^{2x} dx$$

(se presenta de nuevo la integral por partes)

$$u = x \qquad dv = e^{2x} dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}\int e^{2x}(2)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int xe^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

Desarrolla tus habilidades

Resuelve correctamente cada una de las siguientes integrales.

<table>
<tr><th colspan="2">Integral</th><th>Selección de las partes</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">1. $\int x^2 \cos x =$</td><td>$u =$</td></tr>
<tr><td>$du =$</td></tr>
<tr><td>$dv =$</td></tr>
<tr><td>$v =$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4"></td><td>$u =$</td></tr>
<tr><td>$du =$</td></tr>
<tr><td>$dv =$</td></tr>
<tr><td>$v =$</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td colspan="2">$x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">2. $\int x^2 e^x dx =$</td><td>$u =$</td></tr>
<tr><td>$du =$</td></tr>
<tr><td>$dv =$</td></tr>
<tr><td>$v =$</td></tr>
</table>

	$u =$
	$du =$
	$dv =$
	$v =$
Resultado	
3. $\int x^2 e^{-x} dx =$	$u =$
	$du =$
	$dv =$
	$v =$
	$u =$
	$du =$
	$dv =$
	$v =$
Resultado	$-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

En otras ocasiones la integral por partes que buscamos reaparece en el segundo miembro y nos desconcierta sobremanera, pero si analizamos detenidamente el proceso, esto es lo que nos da la pauta para encontrar la solución buscada.

Ejemplo 5

Hallar:

$$\int \sec^3 x dx$$

Solución

Factorizamos $\sec^3 x$ como $\sec x \sec^2 x$, de manera que la integral a resolver es:

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 dx$$

Hagamos $u = \sec x$ $\qquad dv = \sec^2 x dx$

$$du = \sec x \tan x dx \qquad v = \int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 dx = \sec x \tan x - \int \tan x (\sec x \tan x dx)$$

$$= \sec x \tan x - \int \overbrace{\tan^2 x}^{\sec^2 x - 1} \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln(\sec x + \tan x)$$

Aquí es donde reaparece la integral $\int \sec^3 x dx$ que estamos buscando, pero con signo contrario, de manera que trasponiendo términos tendremos:

$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln(\sec x + \tan x)$$

Por tanto la integral buscada es:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x + \ln(\sec x + \tan x)}{2} + C$$

Desarrolla tus habilidades

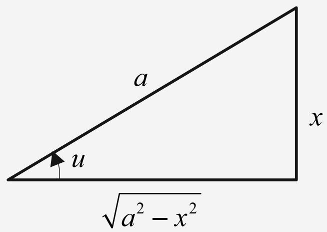
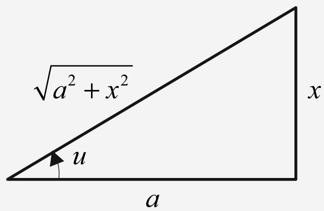
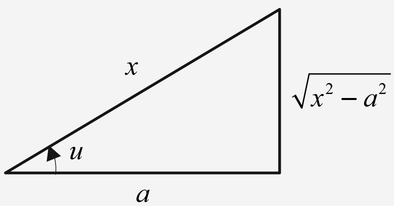
Resuelve correctamente cada una de las siguientes integrales.

Integral		Selección de las partes
1. $\int e^x \cos x dx =$		$u =$
		$du =$
		$dv =$
		$v =$
Resultado	$\frac{1}{2}e^x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + C$	
2. $\int \csc^3 x dx =$		$u =$
		$du =$
		$dv =$
		$v =$
Resultado		
3. $\int e^\theta \operatorname{sen} \theta d\theta =$		$u =$
		$du =$
		$dv =$
		$v =$
Resultado	$\frac{1}{2}e^\theta\left(\operatorname{sen} \theta - \cos \theta\right) + C$	

Integración por sustitución trigonométrica

Las integrales en las que aparece una de las formas $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$ generalmente pueden simplificarse haciendo una sustitución trigonométrica. En estos casos se transforma el integrando en una forma trigonométrica semejante a las que hemos estudiado hasta hoy.

Una manera fácil de relacionar y justificar las formas $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$ con sus correspondientes sustituciones es mediante triángulos rectángulos:

Forma	Sustitución	Justificación
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \operatorname{sen} u$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan u$ $\sqrt{a^2+x^2} = a\sec u$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec u$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan u$	

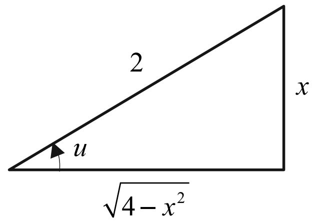
Ejemplos

1. Hallar:

$$\int \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$$

Solución
En primer lugar, la integral se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\int \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}$$



Significa que la integral tiene la forma $\sqrt{a^2-x^2}$.

Por tanto, $a^2=4$ y $a=2$, en seguida hacemos:

$$x = 2\text{ sen } u, \quad dx = 2\cos u\,du \quad \text{y} \quad \sqrt{4-x^2} = 2\cos u$$

luego:

$$\int \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}} = \int \frac{2\cos u}{\left(2\cos u\right)^3}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{4}\int \sec^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\tan u + C = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C \quad \text{Sustituyendo } \tan u = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ en el triángulo.}$$

2. Hallar:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

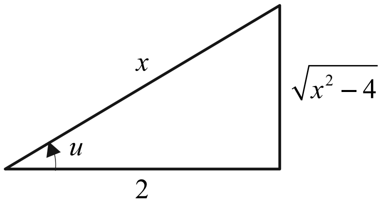
Solución
Hacemos:

$$x = 2\sec u, \quad dx = 2\sec u\tan u\,du \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-4} = 2\tan u$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Luego:



$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec u \tan u}{4\sec^2 u \cdot 2\tan u} du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec u} du$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u du$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C \quad \text{Sustituyendo en el triángulo.}$$

3. Hallar:

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

El hecho de que aparezca $\sqrt{9-x^2}$ en el integrando sugiere la sustitución $x = 3\operatorname{sen} u$ y que al hacerlo llegaremos al resultado correcto, pero la experiencia nos enseña que es más fácil hacer lo siguiente:

$$u = 9 - x^2, \quad du = -2xdx \quad \text{y} \quad -\frac{du}{2} = dx$$

luego:

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2} du = -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{u} = -\sqrt{9-x^2} + C$$

4. Hallar:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$$

Solución

Hacemos:

$$2x = 3\tan u, \quad x = \frac{3}{2}\tan u, \quad dx = \frac{3}{2}\sec^2 u du \quad \text{y} \quad \sqrt{4x^2+9} = 3\sec u$$

Luego:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{3/2 \sec^2 u}{3/2 \tan u \cdot 3\sec u} du$$

$$= \frac{1}{3}\int \underbrace{\frac{1}{\tan u}}_{\cot u} \sec du$$

$$= \frac{1}{3}\int \cot u \sec u du = \frac{1}{3}\int \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\cdot\frac{1}{\cos u} du$$

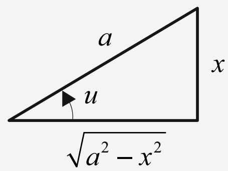
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\operatorname{sen} u} du = \frac{1}{3}\int \csc u du = \frac{1}{3}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + C$$

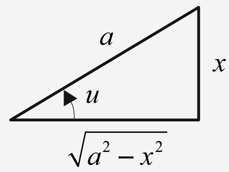
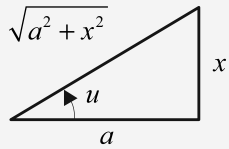
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x} - \frac{3}{2x}\right| + C$$ Sustituyendo en el triángulo.

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x}\right| + C$$ Simplificando.

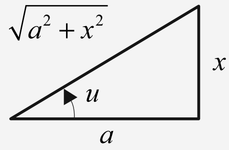
Desarrolla tus habilidades

Calcula las siguientes integrales.

Integral	Sustituciones
1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} =$	
	$x =$
	$dx =$
	$\sqrt{a^2-x^2} =$
Resultado	$-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$

Integral	Selección de las partes
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$	
	$x =$
	$dx =$
	$\sqrt{a^2-x^2} =$
Resultado	
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$	
	$x =$
	$dx =$
	$\sqrt{a^2+x^2} =$
Resultado	$\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right\|+C$

4. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$



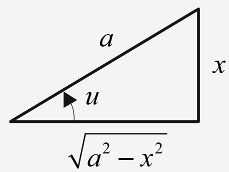
$x =$

$dx =$

$\sqrt{a^2+x^2} =$

Resultado	

5. $\int \frac{x^2\,dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$



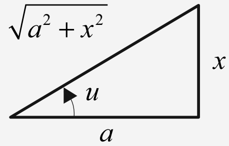
$x =$

$dx =$

$\sqrt{a^2-x^2} =$

Resultado	$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2} + C$

6. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$



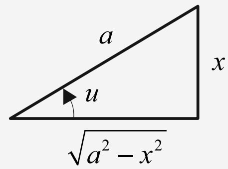
$x =$

$dx =$

$\sqrt{a^2+x^2} =$

Resultado	

7. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$



$x =$

$dx =$

$\sqrt{a^2-x^2} =$

Resultado	$-\sqrt{4-x^2}+C$

El siguiente ejemplo requiere completar primero el cuadrado perfecto, por tanto:

Cuando una expresión implica completar el cuadrado perfecto, basta con sumarle y restarle la mitad del coeficiente de x al cuadrado, y considerar precisamente el signo de este coeficiente. Ejemplos:

a) $x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 = \left(x+1\right)^2 - 1$

b) $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 - 3 = \left(x+1\right)^2 - 4$

c) $2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2\right) + 5 = 2\left(x-1\right)^2 + 3$

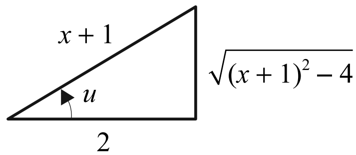
Ejemplo 5

Hallar:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}dx$$

Solución
Primero completamos el trinomio cuadrado:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{\left(x+1\right)^2 - 4}}dx$$



enseguida hacemos la sustitución trigonométrica:

$$x + 1 = 2 \sec u, \quad x = 2 \sec u - 1, \quad dx = 2 \sec u \tan u du \quad \text{y} \quad \sqrt{\left(x+1\right)^2 - 4} = 2 \tan u$$

luego:

$$\int \frac{x}{\sqrt{\left(x+1\right)^2 - 4}}dx = \int \frac{2 \sec u - 1}{2 \tan u} \cdot 2 \sec u \tan u du$$

$$= \int \left(2 \sec u - 1\right) \sec u du = \int \left(2 \sec^2 u - \sec u\right) du$$

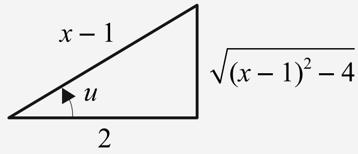
$$= 2 \tan u - \ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$$

$$= 2\frac{\sqrt{\left(x+1\right)^2 - 4}}{2} - \ln\left|\frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{\left(x+1\right)^2 - 4}}{2}\right| + C$$ Sustituyendo en el triángulo.

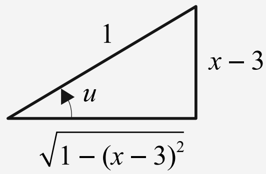
$$= \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \ln\left|\frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{2}\right| + C$$ Desarrollando el binomio.

Desarrolla tus habilidades

Calcula las siguientes integrales.

<table>
<tr><th colspan="2">Integral</th><th>Sustituciones</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}} =$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x =$</td></tr>
<tr><td>$dx =$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{(x-1)^2-4} =$</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td colspan="2">$\ln\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2-2x-3}}{2}\right|+C$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. $\int \frac{1}{\left(x^2-4x+4\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx$</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

3. $\int \sqrt{6x - x^2 - 8}\,dx =$



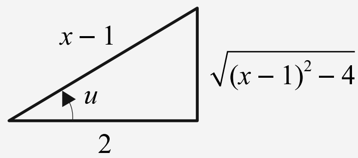
$x =$

$dx =$

$\sqrt{1-\left(x-3\right)^2} =$

Resultado	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(x-3\right)+\frac{1}{2}\left(x-3\right)\sqrt{6x-x^2-8}+C$

4. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx$



$x =$

$dx =$

$\sqrt{\left(x-1\right)^2-4} =$

Resultado	$\sqrt{x^2-2x-3}+C$

Integración de funciones racionales o parciales

En esta sección vamos a recordar que una **función racional** resulta de la división de dos polinomios. Así, por ejemplo:

$$p(x)=\frac{5}{(x-1)^2},\qquad q(x)=\frac{3x-2}{x^2-2x+3}\qquad \text{y}\qquad r(x)=\frac{3x^4-2x^2-x+1}{x^2-x+3}$$

son *funciones racionales*.

De éstas, las dos primeras son **funciones racionales propias**, porque el grado del numerador es menor que el del denominador; en las **impropias** el grado del numerador es igual o mayor que el grado del denominador.

Antes de comenzar a integrar funciones racionales recordemos también que:

$$\frac{3}{2x-1}+\frac{2}{2x+1}=\frac{6x+3+4x-2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{10x+1}{(2x-1)(2x+1)}$$

Es evidente que, por la estructura de la fracción, el proceso inverso tiene que ser de la siguiente manera:

$$\frac{10x+1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}$$

Éste es uno de los varios casos que se nos puede presentar en la técnica de integración de fracciones parciales, que estudiaremos a continuación.

Caso I. El denominador se descompone en factores lineales distintos

Ejemplo

Hallar: $$\int \frac{5x+3}{x^2-9}\,dx$$

Solución

El denominador x^2-9 se puede descomponer en los factores *lineales distintos* $(x+3)(x-3)$. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{5x+3}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}$$

enseguida tratemos de determinar el valor de A y B. Esto es posible si multiplicamos la fracción por x^2-9, lo que tenemos es:

$$5x+3=A(x-3)+B(x+3)$$

La expresión anterior tiene que ser una identidad; luego pensemos precisamente en valores para x que nos permitan conocer los de A y B; por ejemplo, $x = 3$ y $x = -3$.

Si $x = 3$, tenemos que $5(3)+3 = A(3-3)+B(3+3)$, luego resolvemos y,

$$B = \frac{18}{6} = 3$$

Si = −3, luego tenemos que $5(-3)+3 = A(-3-3)+B(-3+3)$, entonces resolvemos y,

$$A = \frac{-12}{-6} = 2$$

Finalmente,

$$\int \frac{5x+3}{x^2-9} = \int \frac{2}{(x+3)} dx + \int \frac{3}{x-3} dx$$

$$= 2\ln(x+3) + 3\ln(x-3) + C$$

Evidencias de aprendizaje

Resuelve correctamente las siguientes integrales.

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$	
Resultado	$\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+C$

2. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$	
Resultado	
3. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$	
Resultado	$\ln\frac{x-2}{x-1}+C$

4. $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

Resultado	

5. $\int \frac{x+2}{x^2+7x+6}\,dx$

Resultado	$\frac{1}{5}\ln(x+1)+\frac{4}{5}\ln(x+6)+C$

Caso II. El denominador tiene un factor lineal repetido

Ejemplo

Determinar:

$$\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx$$

La fracción $\frac{x}{(x-3)^2}$ toma ahora la forma:

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

enseguida tratemos de determinar el valor de A y B. Es evidente que si multiplicamos la fracción por $(x-3)^2$ lo que tenemos es:

$$x = A(x-3) + B$$

La expresión anterior es una identidad; luego pensemos precisamente en valores para x que nos permitan conocer los de A y B, por ejemplo, $x = 3$ y $x = 0$

Si $x = 3$, tenemos que $3 = A(3-3) + B$, luego resolvemos y, $B = 3$.

Si $x = 0$, tenemos que $0 = A(0-3) + 3$, luego resolvemos y, $A = \frac{-3}{-3} = 1$. Por lo tanto,

$$\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)}\,dx + \int \frac{3}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-3)}\,dx + 3\int (x-3)^{-2}\,dx$$

$$= \ln(x-3) - \frac{3}{x-3} + C$$

6. $\int \frac{x+1}{(x-3)^2}\,dx$

Resultado	

7. $\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx$

Resultado	$\ln(x-2)-\frac{2}{x-2}+C$

8. $\int \frac{x+1}{\left(x-1\right)^3}\,dx$

Resultado	

9. $\int \frac{x}{\left(x-1\right)^2}\,dx$

Resultado	$\ln\left(x-1\right)-\frac{1}{x-1}+C$

Caso III. Factores lineales distintos y otros repetidos

Ejemplo

Encontrar: $\int \frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}dx$

Descomponemos la fracción del integrando de la siguiente manera:

$$\frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}=\frac{3x^2-21x+32}{x(x^2-8x+16)}=\frac{3x^2-21x+32}{x\left(x-4\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{\left(x-4\right)^2}$$

Por tanto,

$$3x^2-21x+32=A\left(x-4\right)^2+Bx\left(x-4\right)+Cx$$

La sustitución de $x=0,\ x=4,\ \text{y}\ x=2$ da como resultado $A=2,\ B=1\ \text{y}\ C=-1.$
En consecuencia,

$$\int \frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16}=\int \frac{2}{x}dx+\int \frac{1}{x-4}dx+\int \frac{-1}{\left(x-4\right)^2}dx$$

$$=2\ln x+\ln\left(x-4\right)+\left(x-4\right)^{-1}+C$$

$$=\ln\left[x^2\left(x-4\right)\right]+\frac{1}{x-4}+C$$ Utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$=\ln\left(x^3-4x^2\right)+\frac{1}{x-4}+C$$

10. $\int \frac{2x^2+3}{x^2\left(x-1\right)}dx$

Resultado	

11. $\int \frac{2x^2+3}{x\left(x-1\right)^2}\,dx$	
Resultado	$4\ln\left(x-1\right)-2\ln x-\frac{}{\left(x-1\right)^2}+C$
12. $\int \frac{x^2}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)}\,dx$	
Resultado	

13. $\int \frac{2x-1}{(x+1)^2(x-2)^2}\,dx$	
Resultado	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}\right)+C$

Caso IV. Aparecen factores cuadráticos distintos que no se pueden factorizar

Ejemplo

Encontrar: $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}\,dx$

Descomponemos la fracción del integrando de la siguiente manera,

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{(4x+1)}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Multiplicando la igualdad por $(4x+1)(x^2+1)$

$$6x^2-3x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(4x+1)$$

La sustitución de $x=-\frac{1}{4}$, $x=0$ y $x=1$ da como resultado $A=2$, $B=1$ y $C=-1$. En consecuencia,

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx=\int \frac{2}{4x+1}\,dx+\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{4dx}{4x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1}-\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x+C$$

14. $\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}\,dx$	
Resultado	
15. $\int \frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$	
Resultado	$\ln\frac{x^2+1}{x+1}+3\tan^{-1}x+C$

16. $\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x+3)(x-2)(x^2+1)}\,dx$

Resultado	

17. $\int \frac{x}{x^3 - 1}\,dx$

Resultado	$\frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

Caso V. Aparecen factores cuadráticos repetidos

Ejemplo

Encontrar:

$$\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx$$

Descompongamos la fracción del integrando de la siguiente manera:

$$\frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Por tanto, multiplicando la igualdad por

$$(x+3)(x^2+2)^2$$

$$6x^2-15x+22=A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x+3)(x^2+2)+(Dx+E)(x+3)$$

Resolviendo la identidad, tenemos que

$$A=1,\ B=-1,\ C=3,\ D=-5 \text{ y } E=0$$

En consecuencia,

$$\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}dx=\int \frac{1}{x+3}\,dx+\int \frac{-x+3}{x^2+2}\,dx+\int \frac{-5x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$=\int \frac{dx}{x+3}-\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+2}+3\int \frac{dx}{x^2+2}-\frac{5}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+2)^2}$$

$$=\ln(x+3)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2(x^2+2)}+C$$

18. $\int \frac{x^2 - x + 4}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$	
Resultado	
19. $\int \frac{2 - x + 5x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$	
Resultado	$\ln\frac{x^2}{x^2+1} - \tan^{-1}x - \frac{3}{2(x^2+1)} + C$

20. $\int \frac{2x^3+7x^2+9x+32}{(1-x)(x^2+4)}\,dx$

Resultado	

21. $\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{(1-x)(x^2+1)^2}\,dx$

Resultado	$\frac{3}{4}\ln(x^2+1)-\frac{3}{2}\ln(1-x)-\frac{x+1}{2(x^2+1)}$

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 2

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

¿Al finalizar el bloque adquiriste las habilidades metacognitivas que te permiten	
• identificar la integral y la diferencial como procesos inversos?	
• comprender el concepto de función primitiva o antiderivada?	
• definir la integral indefinida?	
• interpretar la constante de integración en una integral indefinida?	
• obtener la primitiva o antiderivada de una función?	
• calcular el valor de la constante de integración a partir de condiciones iniciales?	
• construir modelos matemáticos de situaciones reales?	
• aplicar el concepto de integral a partir de condiciones iniciales?	
• resolver integrales inmediatas?	
• comprender y utilizar las técnicas de integración propuestas?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste. Tu calificación va de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

BLOQUE 3

Integral definida

Áreas naturales protegidas.

Desempeños del estudiante al concluir el bloque

- Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno teórico.
- Compara el método de las sumas de Riemann con las áreas obtenidas mediante la integral definida, y determina las fortalezas y debilidades de ambos métodos.
- Obtiene integrales definidas de funciones algebraicas y trascendentes en un contexto teórico, y las visualiza como herramientas en la resolución de problemas reales.
- Utiliza un *software* para graficar funciones, algebraicas y trascendentes, estimando el área bajo la curva en cierto intervalo para compararlo con el resultado obtenido por integración.

Objetos de aprendizaje

- Sumas de Riemann.
- Integral definida.

Competencias a desarrollar

- Resuelve problemas de áreas mediante las sumas de Riemann en cualquier contexto de estudio que tenga relación con su entorno.

- Valora el uso de las tecnologías de informática y computación (TIC), como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de áreas bajo la curva en el contexto de la física, la geometría y la química.

Actividades de enseñanza

- Proporcionar lecturas o videos en Internet, para adquirir conocimientos previos sobre el cálculo de áreas bajo la curva. Consultar las ligas proporcionadas.
- Elaborar una presentación multimedia en la que se analice un problema de aplicación de la integral definida relacionado con el entorno del alumno. Organizar al grupo en tríadas y plantear problemas que involucren el cálculo de áreas bajo la curva.
- Proporcionar la lectura del documento hhttp://www.amolasmates.es/pdf/Temas/2BachCT/Integral%definida.pdf para diferenciar entre áreas de regiones positivas y negativas de un sistema cartesiano bidimensional; identificar las propiedades de la integral definida relacionadas y el área delimitada por la intersección de dos funciones.
- Exponer sumas de Riemann y su relación con la integral definida.
- Promover el cálculo de áreas bajo la curva mediante sumas de Riemann, proporcionando diversos casos resueltos como antecedente para resolver una serie de ejercicios propuestos.
- Explicar el uso de algún *software* para calcular áreas bajo la curva.

Actividades de aprendizaje

- Comentar sobre los aprendizajes logrados: organizados en binas, cinco parejas seleccionadas al azar expondrán al grupo sus conclusiones y el resto del grupo las retroalimentará.
- Resolver problemas que involucren áreas bajo la curva de rectas de la forma $y = mx + b$, calculadas desde la perspectiva geométrica y mediante la integral definida para compararlas.
- Realizar una presentación de cuatro diapositivas en PowerPoint con las propiedades de la integral definida, su aplicación en el cálculo de áreas bajo la curva y la delimitada por la intersección de dos funciones.
- Investigar sobre las sumas de Riemann para complementar el tema y entregarlo en dos fichas de investigación.

- Resolver los problemas proporcionados aplicando sumas de Riemann, estableciendo su relación con la integral definida y su posible aplicación en problemas reales de tu entorno.
- Representar de manera gráfica el área delimitada en un cierto intervalo del dominio de una función mediante algún software; calcular ésta con el mismo *software* y compararla con la obtenida mediante la aplicación de las sumas de Riemann. Reflexionar sobre las ventajas y limitaciones del uso de la tecnología y la importancia de contar con una base cognoscitiva sólida previa.

Área bajo una curva

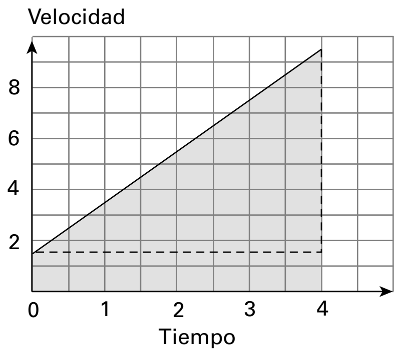
Desarrolla tus competencias

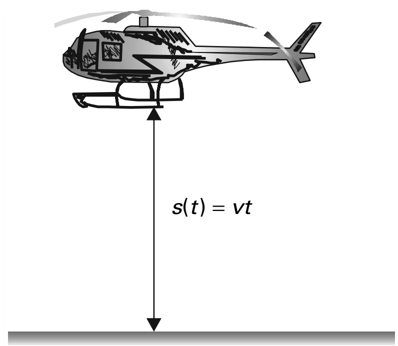
Un helicóptero se eleva de tal manera que su velocidad v, en función del tiempo t, se modela con la ecuación $v = 2t + 1.5$ pies por segundo.

a) Completa la siguiente tabla de velocidad sustituyendo el valor del tiempo en la ecuación $v = 2t + 1.5$ cada medio segundo durante los primeros 4 segundos.

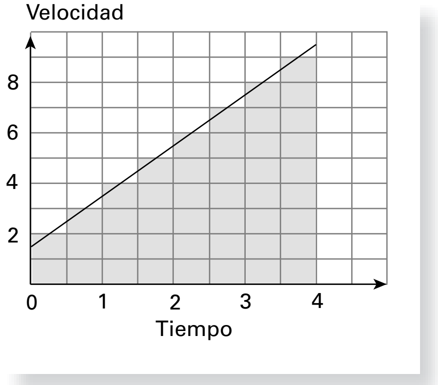
Tiempo (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Velocidad (pies/s)									

b) Ahora calcula el área gris bajo la gráfica de $v = 2t + 1.5$ y observa que corresponde a la elevación del helicóptero durante los primeros 4 segundos, puesto que para obtener el área mencionada se tiene que multiplicar *velocidad por tiempo* $(s = vt)$.





c) Estima el área del inciso anterior sumando las áreas de los rectángulos de aproximación mostrados en la siguiente gráfica. Para tal fin calcula el valor de las alturas de los rectángulos sustituyendo en la ecuación $v = 2t + 1.5$ el valor de t que corresponde al punto medio de la base de éstos. Por ejemplo, la altura del primer rectángulo es $2(0.25) + 1.5 = 2$.



d) Comenta con tu maestro y tus compañeros las conclusiones del experimento anterior.
e) Investiga quién fue Friedrich Bernhard Riemann y escribe una breve reseña de sus aportaciones a las matemáticas.
f) ¿Qué son las sumas de Riemann?

Notación sigma

Históricamente, uno de los problemas fundamentales del cálculo ha sido la determinación del área de una región acotada en un plano. En esta sección veremos que una forma de tratar este problema tiene que ver con la suma de muchos términos. Como preparación para ello vamos a introducir una notación muy útil y cotidiana en matemáticas que se conoce como notación **sigma** o **sumatoria**, y que se escribe con la letra griega mayúscula $\sum$.

Definición de la notación sigma o sumatoria

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se denota por:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

donde:
k se llama índice de la suma,
a_k es el k-ésimo término,
y los límites inferior y superior de la suma son 1 y n, respectivamente; es decir, el primero y último término de la sumatoria.

Ejemplos

Observa las sumas en la parte izquierda de la tabla y analiza su representación simbólica con sumatoria en la parte de la derecha.

Suma	Notación sumatoria
1. $1+2+3+\cdots+10$	$\sum_{k=1}^{10} k$
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$	$\sum_{k=1}^{10} k^2$
3. $\frac{1}{n}(1^2+a)+\frac{1}{n}(2^2+a)+\frac{1}{n}(3^2+a)+\cdots+\frac{1}{n}(n^2+a)$	$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}(j^2+a)$
4. $A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n$	$\sum_{k=1}^{n} A_k$
5. $f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$	$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

Propiedades de las sumatorias

1. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ donde c es una constante.

2. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

Autoevaluación

1. Hallar la suma indicada.

Sumatoria	Resultado
a) $\sum_{k=1}^{3} (2k-1)$	
b) $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k^2+1}$	
c) $\sum_{n=1}^{5} \frac{3}{n+1}$	

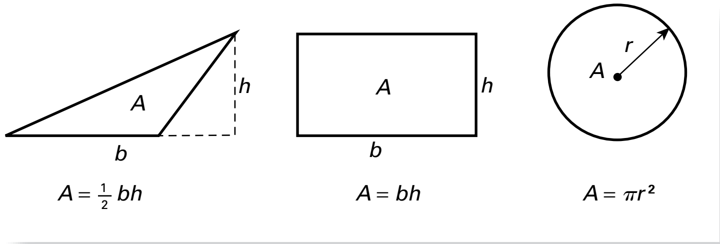
d) $\sum_{k=2}^{5}(k+1)(k-3)$	
e) $\sum_{k=2}^{3}(k^2+1)(k-1)$	

2. Usar la notación sigma para indicar la suma dada en la siguiente tabla.

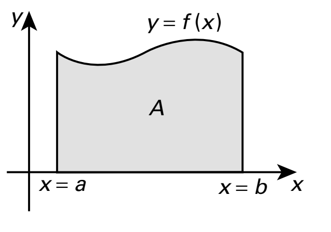
Sumatoria	Resultado
a) $1+2+3+\cdots+n$	
b) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}$	
c) $\frac{a}{1+1}+\frac{a}{1+2}+\frac{a}{1+3}+\cdots+\frac{a}{1+10}$	
d) $\lim_{n\to\infty}(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n)$	
e) $f(x_1)h+f(x_2)h+f(x_3)h+\cdots+f(x_n)h$	

El problema del área

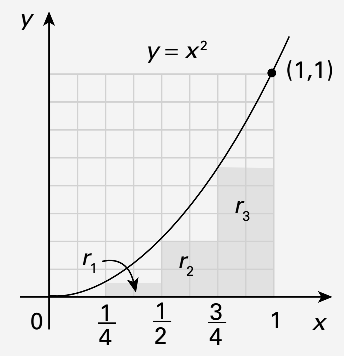
Por lo general, estamos familiarizados con las fórmulas que nos proporcionan las áreas de figuras geométricas como triángulos, rectángulos y circunferencias. A continuación su representación gráfica.

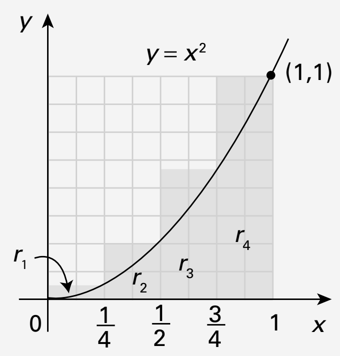


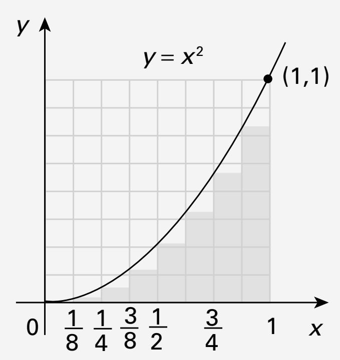
Pero cuando el área es una región limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua y positiva, en su parte inferior por el eje x, a la izquierda por la recta $x = a$ y a la derecha por la recta $x = b$, el problema es el siguiente: ¿Cómo aproximar numéricamente el valor que represente el área A?

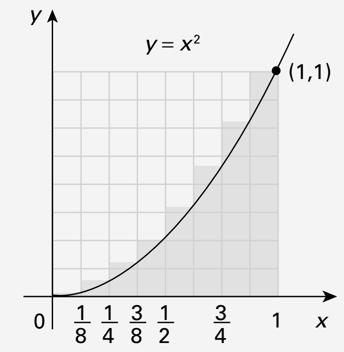


Experimento. Considera dada una de las figuras sugeridas enseguida e intenta estimar el área A debajo de la parábola $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, sumando las áreas de los rectángulos dibujados. Analiza el ejemplo de la primera figura.

Regiones	Gráfica
$r_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{64}$	
$r_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$	
$r_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$	
$A_1 = \sum\left(r_1 + r_2 + r_3\right) = \frac{14}{64} = 0.21875$	

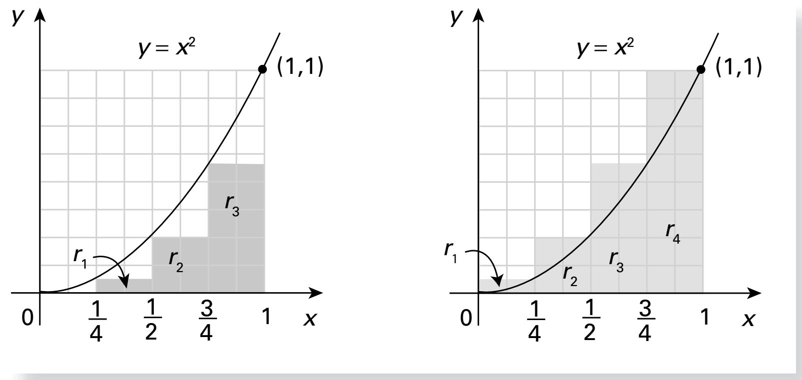
Regiones		Gráfica
$r_1 =$	$r_2 =$	
$r_3 =$	$r_4 =$	
$A_2 = \sum\left(r_1 + r_2 + r_3 + r_4\right) =$		

			Gráfica
$r_1 =$	$r_2 =$	$r_3 =$	
$r_4 =$	$r_5 =$	$r_6 =$	
$r_7 =$			
$A_3 = \sum\left(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_7\right) =$			

<table>
<tr><td>$r_1 =$</td><td>$r_2 =$</td><td>$r_3 =$</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>$r_4 =$</td><td>$r_5 =$</td><td>$r_6 =$</td></tr>
<tr><td>$r_7 =$</td><td>$r_8 =$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$A_4 = \sum\left(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_8\right) =$</td></tr>
</table>

Comenta con tus compañeros, ¿qué nos enseña el experimento anterior?

El cálculo del experimento anterior debió haberte quedado de la siguiente manera:

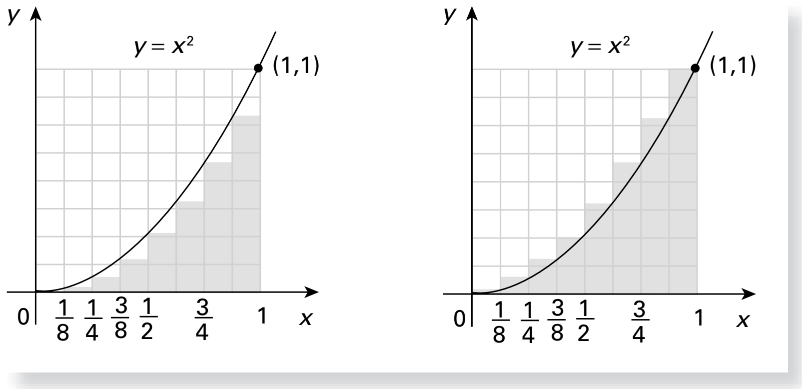


$A_1 = 0.21875$ $A_2 = 0.46875$

Es evidente que el área debajo de la curva es mayor que A_1 y menor que A_2, es decir,

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Cuando aumentamos el número de franjas obtenemos mejores estimaciones, tanto con los rectángulos por debajo de la curva como con los que se ubican por encima de ella.



$A_3 = 0.273475$ $\qquad$ $A_4 = 0.3984375$

$$0.273475 < A < 0.3984375$$

La experiencia ha enseñado que al usar 50 franjas el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas se halla entre 0.3328335 y 0.3338335. Promediando estos números se obtiene que $A \approx 0.3333335$.

Se puede demostrar que a medida que el número de franjas n crece indefinidamente, las sumas inferiores y superiores tienden a $\frac{1}{3}$ como límite; es decir:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n\right) = \frac{1}{3}$$

Sumas de Riemann

Si aplicamos la idea del experimento anterior de un modo muy general, considerando n rectángulos de anchos iguales Δx y alturas $f\left(x\right)$, y tomadas éstas como la ordenada correspondiente al valor de un punto de la curva, en donde x es la abscisa del punto medio del subintervalo Δx, entonces, el área del rectángulo de aproximación en ese punto es $f\left(x\right)\Delta x$. Podemos intuir, por tanto, que el área A limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua y positiva, en su parte inferior por el eje x, a la izquierda por la recta $x = a$ y a la derecha por la recta $x = b$, se puede aproximar con la suma de las áreas de esos rectángulos. Podemos escribir entonces:

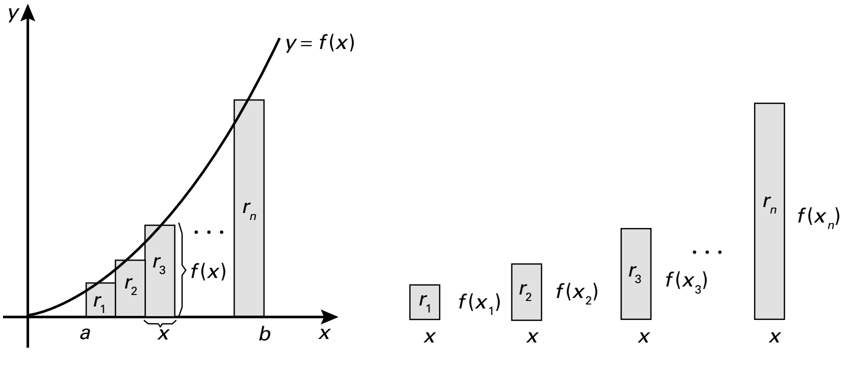
$$A = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x = f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + \cdots + f\left(x_n\right)\Delta x$$

$$= \Delta x\left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \cdots + f\left(x_n\right)\right]$$

Donde Δx lo podemos determinar con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y n es el número de franjas que deseamos.

La expresión anterior se llama **suma de Riemann** en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), quien creó la definición de integral que utilizamos en la actualidad.

Fiedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Destacado matemático alemán, autor de *Geometría riemanniana, Superficie de Riemann, Integración de Riemann, Función zeta de Riemann, Variedad de Riemann* y *Tensor métrico.*

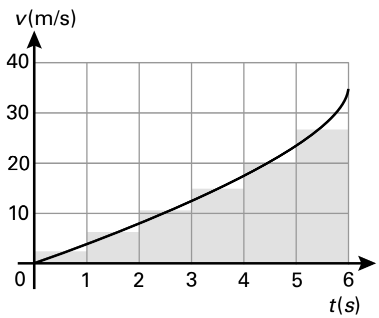


Es evidente que cuando el numero de rectángulos n tiende a infinito, el cálculo de A se aproxima con tal exactitud a su valor real que en la actualidad ello está fuera de toda discusión. Por tanto, definimos el área A de la región mencionada de la siguiente manera:

> El área A de una región que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua $f(x)$ es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación $f(x)\Delta x$.
>
> $$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x\right]$$

Ejemplos

1. La gráfica muestra el movimiento de un automóvil desde el reposo hasta alcanzar una velocidad de 36 metros por segundo. Úsala para estimar la distancia que recorre durante los 6 primeros segundos.



Solución

Como puede verse en la gráfica, la distancia es el valor del área por debajo de la curva y es aproximada a la suma de las franjas de aproximación $(s = vt)$. El tamaño de Δx lo decidimos nosotros de la siguiente manera.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Con $a = 0$ y $b = 6$, vamos a considerar $n = 6$ rectángulos; entonces,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1$$

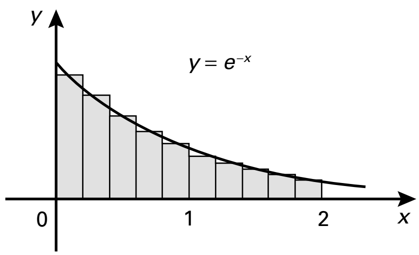
Con $n = 6$, los subintervalos de ancho $\Delta x = 1$ son [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5] y [5, 6].

Los puntos medios de esos subintervalos son $x = 0.5$, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, y 5.5, y la suma del área de los 6 rectángulos de aproximación es:

$$\begin{aligned} s = \sum_{k=1}^{6} f(x_k)\Delta x &= f(0.5)\Delta x + f(1.5)\Delta x + f(2.5)\Delta x + f(3.5)\Delta x + f(4.5)\Delta x + f(5.5)\Delta x \\ &= f(0.5)(1) + f(1.5)(1) + f(2.5)(1) + f(3.5)(1) + f(4.5)(1) + f(5.5)(1) \\ &= (1)(2+6+11+15+20+26) = 80 \text{ metros} \end{aligned}$$

Observa que los valores de $f(x_k)$ son valores aproximados y tomados de la gráfica.

2. Considera el área de la región que está debajo de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 2$. Estima el área al tomar como puntos muestra los puntos medios de las bases de los rectángulos de aproximación, considerando 10 subintervalos.



Solución

Con $n = 10$; $\Delta x = \frac{2-0}{10} = 0.2$ y los subintervalos son [0, 0.2], [0.2, 0.4], [0.4, 0.6], . . . , [1.8, 2], por tanto los puntos medios serían:

$$x = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9$$

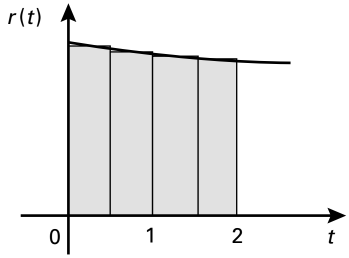
Entonces el área es:

$$\begin{aligned} A = \sum_{k=1}^{10} f(x_k)\Delta x &= f(0.1)\Delta x + f(0.3)\Delta x + f(0.5)\Delta x + \cdots + f(1.9)\Delta x \\ &= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632 \end{aligned}$$

3. Ciertos comestibles se introducen en un congelador. Después de un tiempo t medido en horas, la temperatura de éstos baja a razón de $r(t) = 2 + \frac{2}{t+3}$ grados centígrados.

a) Estima el área bajo la gráfica de $r(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 2$ considerando 4 rectángulos.

b) ¿Qué significa el área de la parte a)?



Solución

Con $n = 4$; $\Delta t = \frac{2-0}{4} = 0.5$ y los subintervalos son [0, 0.5]. [0.5, 1.0], [1.0, 1.5], [1.5, 2], en los puntos medios:

$$t = 0.25, 0.75, 1.25, 1.75$$

a) $$A = \sum_{k=1}^{6} r(t_k)\Delta x = r(0.25)(0.5) + r(0.75)(0.5) + r(1.25)(0.5) + r(1.75)(0.5)$$

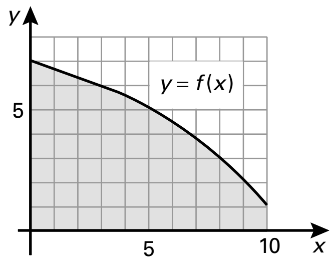
$$= \left(2 + \frac{2}{0.25+3}\right)(0.5) + \left(2 + \frac{2}{0.75+3}\right)(0.5) + \left(2 + \frac{2}{1.25+3}\right)(0.5) + \left(2 + \frac{2}{1.75+3}\right)(0.5)$$

$$= 0.5(2.6153 + 2.5333 + 2.4705 + 2.4210) \approx 5$$

b) Significa que la temperatura baja durante las dos primeras horas.

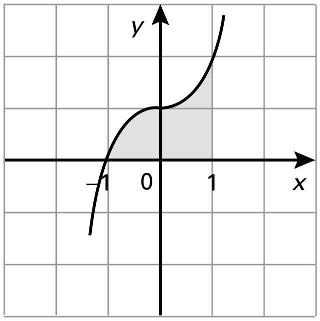
Evidencias de aprendizaje

1. Utiliza los valores de la gráfica de $y = f(x)$ mostrada abajo y usando 10 rectángulos encuentra una estimación del área debajo de la curva dada, desde $x = 0$ hasta $x = 10$.

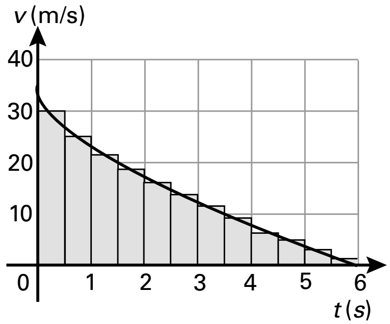


R. Aprox. 47

2. Estima el área debajo de la gráfica de $y = 1 + x^3$, desde $x = -1$ hasta $x = 1$, dibujando 4 rectángulos.

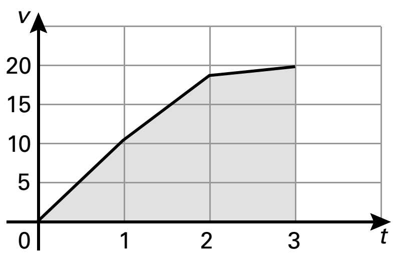


3. La gráfica muestra la velocidad en metros por segundo de un automóvil al frenar. Úsala con los rectángulos sugeridos para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.



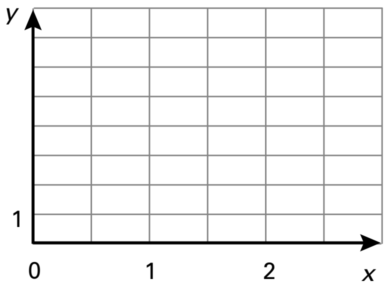
R. Aprox. 81

4. La velocidad de un corredor aumentó de manera paulatina durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su velocidad (m/s) a intervalos de medio segundo. Encuentre la estimación de la distancia que recorrió en esos tres segundos. Elige 6 rectángulos de aproximación.



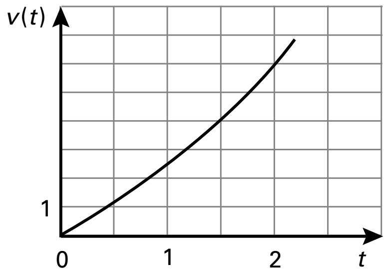
t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
V	0	5	11	15	18	19	20

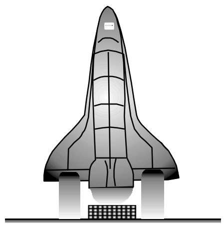
5. Bosqueja la gráfica de la función $y = e^x$ y estima el área debajo de ella desde $x = 0$ hasta $x = 2$ utilizando 8 subintervalos.



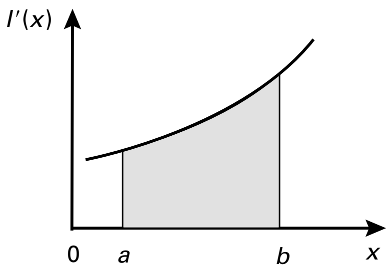
R. Aprox. 6.4

6. La velocidad $v(t)$ de un cohete después de t segundos del despegue es $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$ metros por segundo. Determina la distancia que recorre el cohete a los 2 segundos de haber despegado y represéntala en la gráfica como un área. Realiza la aproximación con 4 rectángulos.

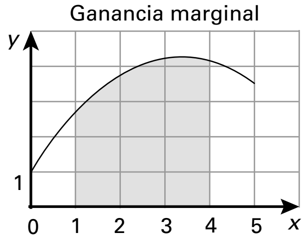




7. Si $I(x)$ es el ingreso producido por la venta de x unidades de cierto producto, y si $I'(x)$ es la función de ingreso marginal, desde el punto de vista económico, ¿cómo se interpreta el área sombreada de la figura?



8. Si la función de ganancia marginal de un negocio es $1 + 2x - 0.3x^2$ a un nivel de producción x, encuentra la ganancia extra por pasar a vender de 1 a 4 unidades. Utiliza por lo menos 6 rectángulos de aproximación.



La integral definida


Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716).

Para iniciar este tema, cabe destacar que Gottfried Whilhelm Von Leibniz, filósofo y matemático alemán, es considerado el padre del cálculo moderno. Leibniz introdujo el símbolo $\int$, llamado signo integral. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama integrando, y a y b se conocen como límites inferior y superior, respectivamente. El símbolo dx es sólo un operador del integrando. El procedimiento para calcular una integral se llama integración.

Cuando estudiamos la **suma de Riemann** en la sección anterior vimos que cuando intentamos calcular un área o la distancia recorrida por un objeto resulta un límite de la forma:

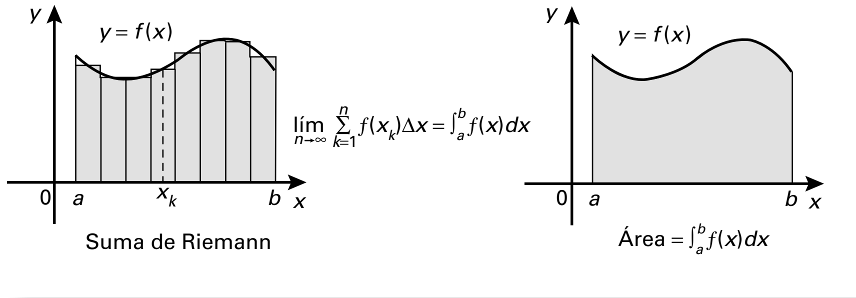
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x\right]$$

Este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando $f(x)$ no es positiva; también sirve para hallar longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, el trabajo, el ingreso total de una compañía y otras cantidades. En el cálculo tiene un nombre y una notación especial.

Integral definida

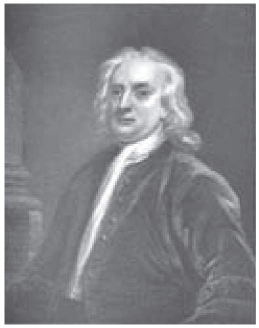
Si $f(x)$ es una función continua definida para un intervalo $a \le x \le b$, y dividimos a éste en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, elegimos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ como puntos muestra para calcular $f(x_1), f(x_2),$,..., $f(x_3),..., f(x_n)$ respectivamente. Entonces, la **integral definida** de $f(x)$, desde a hasta b, es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$



Evaluación de las integrales definidas

Calcular las integrales definidas a partir de la definición como un límite de sumas de Riemann resulta un procedimiento largo y difícil. Sir Isaac Newton descubrió un método mucho más sencillo para evaluar las integrales y unos cuantos años después, Leibniz realizó el mismo hallazgo. Este descubrimiento es parte del **Teorema Fundamental del Cálculo**.


Isaac Newton (1642-1727).

Cabe destacar la importancia de la obra de Isaac Newton, astrónomo inglés, para el cálculo. Nació el 25 de diciembre de 1642, en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. Hizo su carrera académica en el Colegio de la Trinidad, de Cambridge y publicó su obra *Principia Mathematica* a instancias del astrónomo Halley; se trata del tratado científico más grande jamás escrito. Expuso su versión del cálculo y lo usó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de los planetas y los cometas.

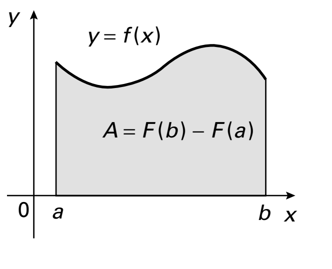
Teorema Fundamental del Cálculo

Supongamos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y que $F(x)+C$ es la antiderivada de $f(x)dx$, es decir, el área A bajo la curva:

$$A = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Si recurrimos a las condiciones iniciales, el área A debajo de la curva es cero cuando $x = a$; por lo tanto,

$$0 = F(a) + C \quad \text{de donde} \quad C = -F(a)$$



Entonces $A = \int f(x)dx = F(x) - F(a)$; luego, cuando $x = b$ recorremos toda el área, y ésta es:

$$A = F(b) - F(a)$$

Con lo cual queda definida la integral $A = \int f(x)\,dx = F(x) + C$. Este análisis nos conduce al siguiente teorema que, por cierto, es una forma del Teorema fundamental del cálculo.

Teorema de evaluación

Si $f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier integral de $f(x)$; es decir $F'(x) = f(x)$

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ donde c es una constante arbitraria.
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ donde c es una constante arbitraria.
4. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

La definición de integral definida y sus propiedades las usaremos de manera implícita en las actividades de trabajo que realizaremos enseguida.

Ejemplos

1. Expresa:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - e^{x_k}\right) \Delta x$$

como una integral definida en el intervalo [0, 3].

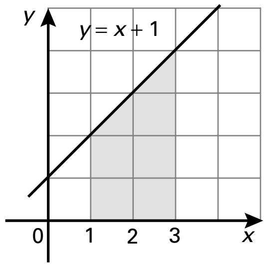
Solución
Si recurrimos a la definición de integral definida en funcion de la suma de Riemann, observamos que:

$$f(x_k) = x_k - e^{x_k}$$

También es claro que $a = 0$ y $b = 3$. Por lo tanto, la expresión queda de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - e^{x_k}\right) \Delta x = \int_0^3 \left(x - e^x\right) dx$$

2. Evalúa la integral $\int_1^3 (x+1)\,dx$ interpretando el resultado como el área debajo de la función, el intervalo dado y el eje de las x.



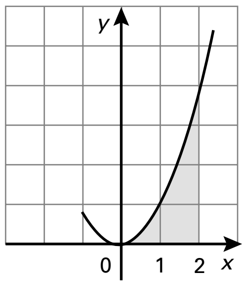
Solución
Integrando la expresión tenemos que:

$$\int_1^3 (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x\Big]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2}+3\right) - \left(\frac{1^2}{2}+1\right) = 6$$

Para interpretarla como un área, fíjate en la gráfica y cuenta el número de cuadros.

3. Evalúa:

$$\int_0^2 x^2 dx$$



Solución
Integrando:

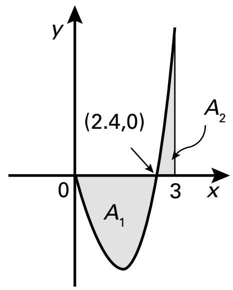
$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^2 = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = \frac{8}{3} \approx 2.7$$

significa que el área bajo $y = x^2$ en el intervalo [0, 2] es aproximadamente 2.7 unidades cuadradas.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

4. Evalúa e interpreta gráficamente la integral:



$$\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x\right)dx$$

Solución

Integrando:

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x\right)dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^2\Big]_0^3$$

$$= \left(\frac{1}{8}\cdot 3^4 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot 0^4 - \frac{3}{2}\cdot 0^2\right)$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{27}{2} - 0 + 0 = -3.375$$

Atención. En realidad este resultado no se puede interpretar como una sola área, sino que, como la función toma valores positivos y negativos, entonces representa la diferencia de áreas $A_1 - A_2 = -3.375$.

Si consideramos que en la región de A_1 la función es negativa, podríamos obtener el valor absoluto de la integral

$A_1 = -\int_0^{2.4}\left(\frac{1}{2}x^3 - 3x\right)dx$ y entonces sumarla con

$A_2 = \int_{2.4}^{3}\left(\frac{1}{2}x^3 - 3x\right)dx,$ ya que es positiva, para obtener el área total

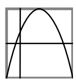
de las dos regiones.

Winplot

El *software* Winplot es un programa de distribución gratuita creado por el profesor Richard Parris, de la *Philips Exeter Academy*, en New Hampshire. Es una *excelente herramienta tecnológica que sirve para graficar y analizar funciones matemáticas* en un ambiente de Windows. Se puede descargar en la dirección:

http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Para acceder a este programa se te sugiere un acceso directo en la pantalla de inicio. El icono de **Winplot** es el siguiente:



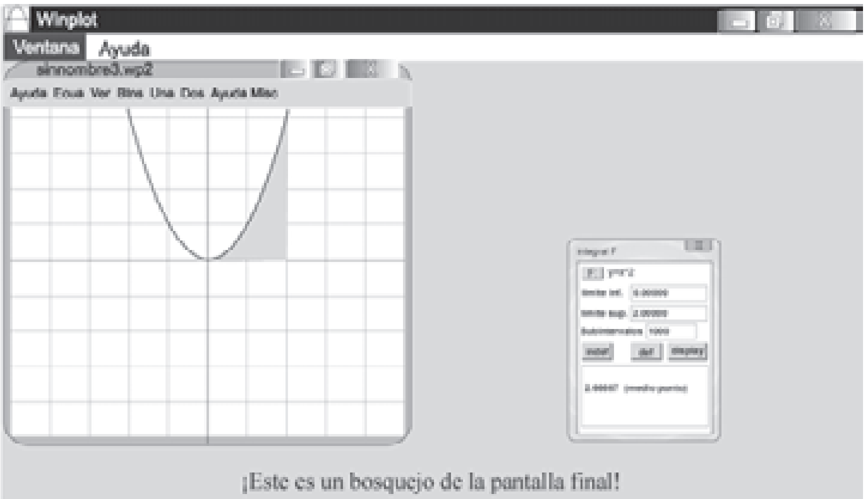
Secuencia didáctica. Los pasos que debes seguir para graficar y obtener el área bajo la curva de una función son los siguientes.

Por ejemplo, para obtener el valor de la integral:

$$\int_0^2 x^2 dx$$

Ventana → 2 dim → Ecuación → Explícita → y=x^2 → Una

→ lím. inf. → lím. sup. → definida



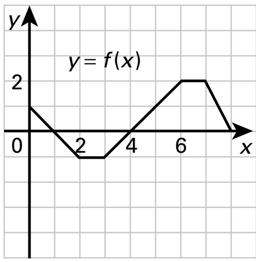
Evidencias de aprendizaje

1. Completa las celdas de la tabla siguiente expresando el límite como una integral definida dado el intervalo, o bien, escribe la integral dada como un límite de sumas. Finalmente, evalúa cada expresión. Observa la primera fila.

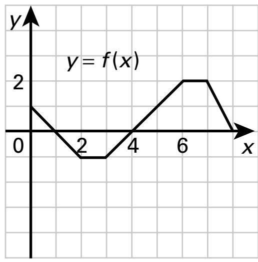
Sumatoria de Riemann	Integral definida	Resultado
a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta x,\ [0, 5]$	$\int_0^5 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3}$	$\frac{125}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(2x_k-1)\Delta x,\ [0,2]$		
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos x_k\Delta x,\ [0,\pi]$		
d)	$\int_1^3 x^2dx$	
e)	$\int_0^1 (x^3-2x)^2dx$	

2. Dada la gráfica de $f(x)$, evalúa e interpreta cada integral sombreando el área respectiva.

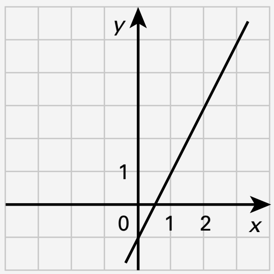


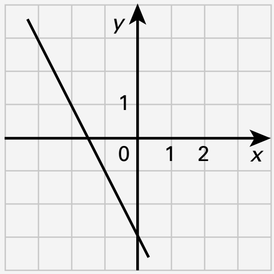
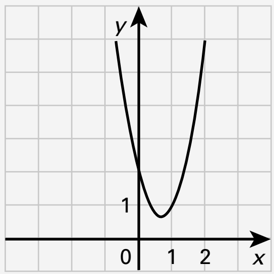
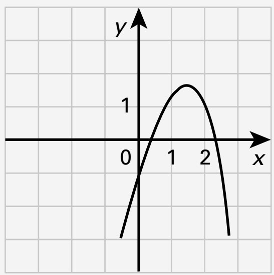
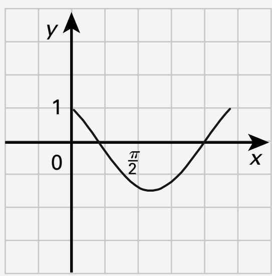
$\int_0^4 f(x)\,dx$



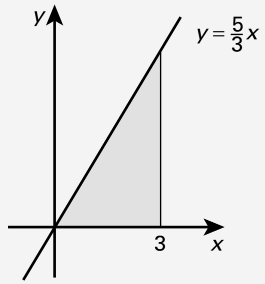
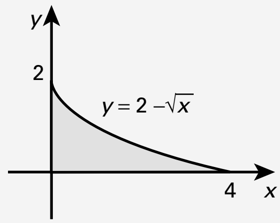
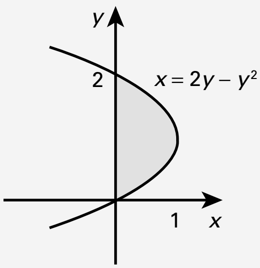
$\int_5^7 f(x)\,dx$

3. Evalúa e interpreta cada integral sombreando el área respectiva.

Integral definida y gráfica	Resultado
1. $\int_1^3 (2x-1)\,dx =$ 	6

2.	$\int_{-3}^{-1}\left(-2x-3\right)dx =$ 	
3.	$\int_{0}^{2}\left(3x^2-4x+2\right)dx$ 	4
4.	$\int_{0}^{2}\left(4x-e^x\right)dx$ 	
5.	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\right)dx$ 	0

4. Evalúa el área sombreada en la gráfica mostrada.

Integral definida y gráfica	Resultado
1. 	
2. 	Aprox. 2.7
3.  (Sugerencia: resuelve la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$.)	

Aplicaciones de la integral definida

Hasta aquí hemos visto que la evaluación de la integral definida de una función $f(x)$, que es continua en el intervalo [*a*, *b*], viene dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde $F'(x) = f(x)$, de modo que podemos volver a escribir la integral definida de la forma:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ significa una razón de cambio de y con respecto a x y que $F(b) - F(a)$ es lo que cambia la función $f(x)$, cuando x se incrementa de a hasta b. De manera que podemos volver a plantear la definición de integral definida de la siguiente manera.

Teorema del cambio total

La integral de una razón de cambio es el cambio total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos

1. **Tasa de crecimiento.** Si $h'(t)$ representa el crecimiento de un árbol en centímetros por año, ¿qué significa la expresión $\int_1^5 h'(t)\,dt$?

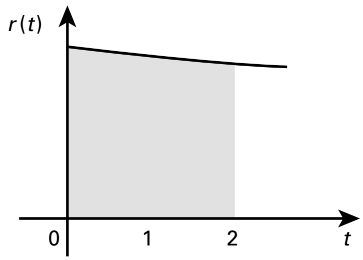
   Solución
   Representa el crecimiento del árbol desde el año 1 hasta el año 5.

2. **Costos.** Si $C'(x)$ es el costo marginal para producir x unidades de un artículo, ¿qué significa $C(x_2) - C(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx$?

   Solución
   Es el incremento del costo cuando la producción cambia desde x_1 unidades hasta x_2 unidades.

3. **Cambio de temperatura.** Cierta clase de comestibles se introducen dentro de un congelador. Después de un tiempo t medido en horas la temperatura de éstos baja a razón de $r(t) = 2 + \dfrac{2}{t+3}$ grados centígrados. Estima el área bajo la gráfica de $r(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 2$.

   Solución
   Si recuerdas, este ejemplo se resolvió en el tema de la **suma de Riemann** con rectángulos de aproximación. Veamos que es mucho más sencillo resolverlo utilizando la **integral definida**.



$$A = \int_0^2 \left(2 + \frac{2}{t+3}\right) dt = \left[2t + 2\ln(t+3)\right]_0^2$$

$$= \left[2(2) + 2\ln(2+3)\right] - \left[2(0) + 2\ln(0+3)\right]$$

$$\approx 7.22 - 2.2 \approx 5.02$$

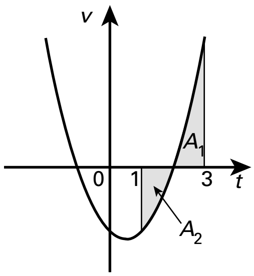
4. **Desplazamiento y distancia recorrida por un móvil.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de modo que su velocidad en el instante t es $v = t^2 - t - 2$ metros por segundo.

   a) Encuentra el desplazamiento de la partícula en el periodo [1, 3].

(*Continúa*)

(*Continuación*)

b) Halla la distancia recorrida durante ese periodo.



Solución

a) El desplazamiento s es:

$$s(3)-s(1)=\int_1^3 \left(t^2-t-2\right) dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2t\right]_1^3=\frac{2}{3}\text{ metros,}$$

lo que significa que la posición de la partícula está a $\frac{2}{3}$ de metro a la derecha.

b) En este caso vamos a calcular las áreas A_1 y A_2 por separado, para eso es necesario conocer las raíces de la función, es decir, donde la función $v = t^2 - t - 2$ se cruza con el eje x y así delimitar cada región del área.

Si resolvemos $t^2 - t - 2 = 0$ con la fórmula general, tenemos que:

$$t=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} t=2 \\ t=-1 \end{cases}$$

De donde $t_1 = 2$ y $t_1 = -1$; entonces el valor de interés para nuestro ejercicio es $t_1 = 2$ porque es el límite que divide las áreas. Por tanto,

$$A_2=-\int_1^2 \left(t^2-t-2\right) dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^2=\frac{7}{6}$$

Observa que se antepone un signo negativo a la integral porque la función es negativa en el intervalo [1, 2], y así nos resulta el valor numérico del área. Ahora calculamos A_1:

$$A_1=\int_2^3 \left(t^2-t-6t\right) dt=\frac{11}{6}$$

La distancia total recorrida de la partícula es una suerte de vaivenes y corresponde a la suma de $A_1 + A_2 = \frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$ metros.

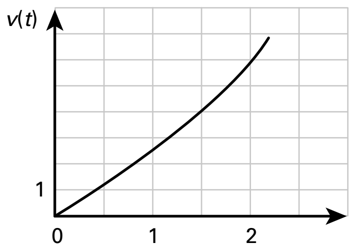
Evidencias de aprendizaje

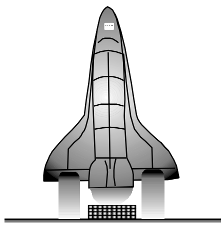
1. Si $h'(t)$ es la razón del crecimiento de un niño en centímetros por año, ¿qué representa $\int_4^8 h'(t)\,dt$?

2. Si la función de ingreso marginal es $R'(x)$, donde x es el número de unidades vendidas, ¿qué representa $\int_{100}^{500} R'(x)\,dx$?

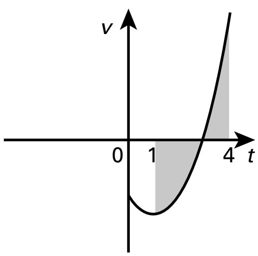
3. Una población de animales se inicia con 10 de éstos, y se incrementa a razón de $n'(t)$ ejemplares por semana. ¿Qué representa $10+\int_0^{15} n'(t)\,dt$?

4. La velocidad $v(t)$ de un cohete después de t segundos del despegue es $v(t)=\frac{1}{2}t^2+2t$ metros por segundo. Determina la distancia que recorre el cohete a los 2 segundos de haber despegado y represéntala en la gráfica como un área.





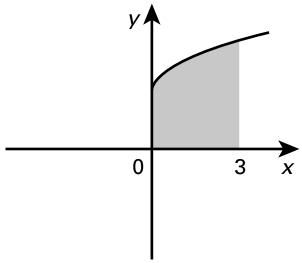
5. La función de velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta es $v(t)=t^2-2t-3$. Encuentra el desplazamiento y la distancia total recorrida en el intervalo [1, 4].



R. $s=-3$

$A=\frac{23}{3}$

6. La densidad lineal de una varilla es $m'(x) = 2 + \sqrt{x}$, medida en kilogramos por metro; si la longitud de ésta es 3 metros y x es la distancia desde uno de los extremos de la varilla, encuentra su masa total.

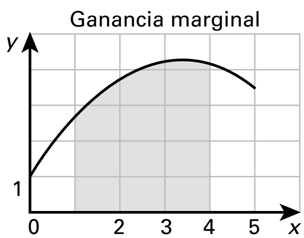


7. Una población de animales crece a razón de 100 + 25t al año. ¿En cuánto aumenta la población de animales entre el cuarto y el décimo año?

R. Aprox. 1650

8. El costo marginal para fabricar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ dólares por yarda. Encuentra el incremento del costo, si el nivel de producción se eleva de 2 000 yardas a 4 000 yardas.

9. Si la función de ganancia marginal de un negocio es $1 + 2x - 0.3x^2$ a un nivel de producción x, encuentra la ganancia extra por aumentar ventas de 1 a 4 unidades.



R. Aprox. 11.7

Trabajo mecánico

Cuando movemos un objeto a lo largo del eje x y lo hacemos con una fuerza variable $f(x_k)$, definimos el **trabajo realizado al mover el objeto desde *a* hasta *b*** considerando intervalos de distancia Δx como:

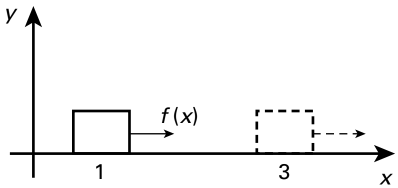
$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplos

1. Cuando una partícula se desplaza una distancia de x pies desde el origen, una fuerza $f(x) = x^2 + 2x$ medida en libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza cuando se mueve en el intervalo [1, 3]?

Solución

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^3 \approx 16.67$$



El trabajo realizado aproximadamente es de16.67 lb-pies.

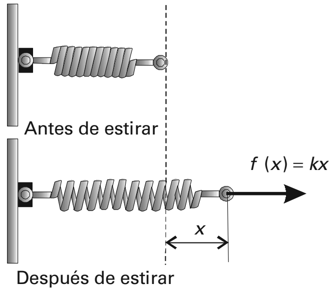
2. Se requiere una fuerza de 40 Newton para sostener un resorte estirado desde su longitud natural de 10 cm hasta una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza para estirarlo desde 15 cm hasta 18 cm?

Solución

De acuerdo con la ley de Hooke, para estirar un resorte se necesita una fuerza de $f(x) = kx$.

Cuando se estira de 10 hasta 15 cm, la cantidad estirada es 0.05 m. Esto significa que $f(0.05) = 40$ Newton. Por tanto,

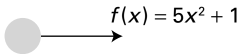
$0.05k = 40$, de donde $k = \dfrac{40}{0.05} = 800$, luego $f(x) = 800x$ y el trabajo realizado para llevar el resorte de 15 cm hasta 18 cm es:



$$W = \int_{0.15}^{0.18} 800x\,dx = \left[400x^2\right]_{0.15}^{0.18}$$
$$= 400\left[(0.18)^2 - (0.15)^2\right] = 3.96 \text{ joules}$$

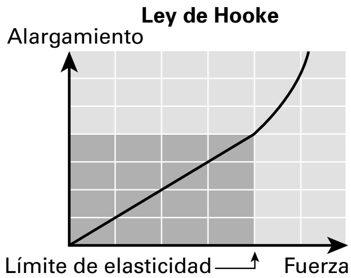
Evidencias de aprendizaje

1. Una partícula se mueve a lo largo del eje x por la acción de una fuerza que mide $f(x) = 5x^2 + 1$ libras en un punto a x pies del origen. Encuentra el trabajo realizado al moverla desde el origen hasta una distancia de 10 pies.

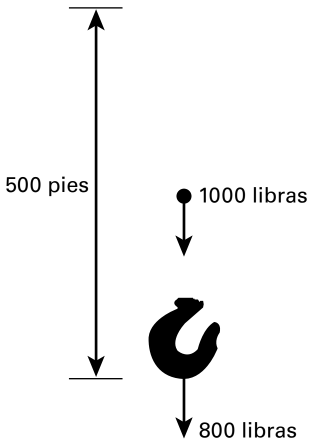


R. Aprox. 1676.7 lb - pies

2. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Si se requiere una fuerza de 25 Newton para mantenerlo estirado hasta una longitud de 30 cm, ¿cuánto trabajo se necesita para estirarlo desde 20 cm hasta 25 cm?



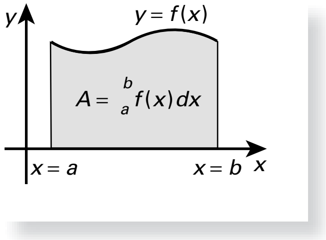
3. Se usa un cable que pesa 2 libras por cada pie que mide para elevar 800 libras de carbón hacia arriba del tiro de una mina de 500 pies de profundidad. Encuentra el trabajo realizado. (Considera que el peso del cable está concentrado en su centro de gravedad y sólo recorre la mitad de la distancia).



R. 650 000 lb - pies

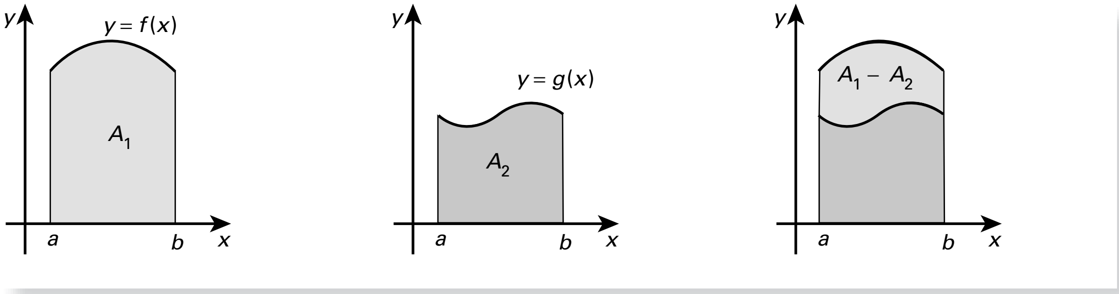
Área entre dos gráficas

Hasta ahora hemos visto que el área A de la región limitada por la gráfica continúa de $f(x)$; el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ se pueden obtener por medio de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.



Ahora calcularemos el área limitada por la intersección de dos gráficas cuyas funciones son continuas.

Consideremos la figura de abajo en donde las áreas de las dos primeras gráficas se combinan para obtener el área deseada entre dos funciones continuas que se intersecan.



$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad$ $A_2 = \int_a^b g(x)\,dx$ $\qquad$ $A_1 - A_2 = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$

Como puede verse, es obvio que el área $A = A_1 - A_2$, entre las gráficas, algebraicamente puede obtenerse a partir de la expresión:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

Ejemplos

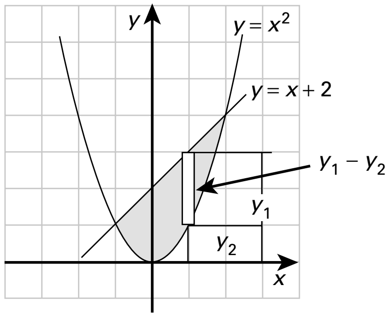
1. Hallar el área de la región limitada por $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2$.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Solución

El primer paso será hallar los puntos de intersección de las curvas para conocer los límites de los rectángulos de aproximación (véase figura).



Si resolvemos las ecuaciones por igualación tenemos:

$x + 2 = x^2$ o bien $x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$ factorizando

$x_1 = -1$ y $x_2 = 2$ y resolviendo.

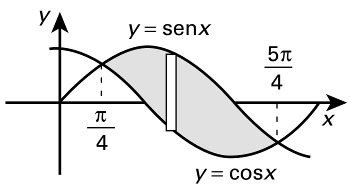
Por tanto, las gráficas se cortan en $(-1,1)$ y $(2,4)$.

El área de la región buscada es la integral $\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]dx$, es decir:

$$\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} + 2(2) - \frac{2^3}{3}\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{9}{2} = 4.5$$

2. Hallar el área de la región representada en la siguiente figura.



Solución

$$\text{Área} = \int_{\pi/4}^{5\pi/4}\left[\operatorname{sen} x - \cos x\right]dx = \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

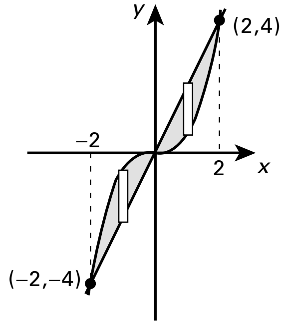
Recuerda que $\pi = 180°$ en el sistema sexagesimal. Si usas 3.1415… cambia tu calculadora a la modalidad de radianes.

3. Según se representa en la figura, hallar el área de la región comprendida entre las curvas:

$$y = 2x \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}x^3$$

Solución

Para obtener los puntos de intersección se igualan las ecuaciones,



$$2x = \frac{1}{2}x^3$$

$$4x = x^3 \qquad \text{multiplicando por 2}$$

$$x^3 - 4x = 0 \qquad \text{trasponiendo términos}$$

$$x\left(x^2 - 4\right) = 0 \qquad \text{factorizando y}$$

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = 2 \qquad \text{resolviendo la ecuación.}$$

Si integramos considerando los límites desde $x = -2$ hasta $x = 2$, el área por simetría se anularía, de manera que tenemos que integrar en dos partes y luego sumar para obtener el resultado en términos de área:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x\right)dx + \int_{0}^{2}\left(2x - \frac{1}{2}x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{8} - x^2\right]_{-2}^{0} + \left[x^2 - \frac{x^4}{8}\right]_{0}^{2} = \left[0 - (-2)\right] + \left[2 - 0\right] = 4$$

Observa cómo se acomodan las funciones en la integral al momento de hacer la resta para obtener el área positiva.

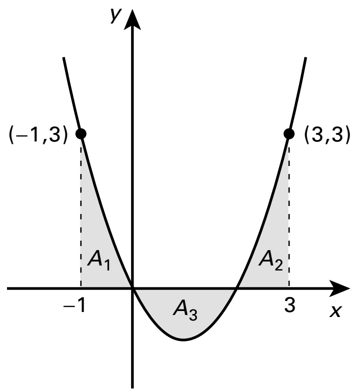
4. Calcular: $\int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x\right)dx$ e interpretar el significado en términos de áreas. Además, hallar el valor del área limitada por la curva, el eje x y los límites de la integral.

Solución

$$\int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{3} = \left[\frac{3^3}{3} - 3^2\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right] = \frac{4}{3}$$

significa que $A_1 + A_2 - A_3 = \dfrac{4}{3}$

Ahora bien, el área $A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$ viene dada por:

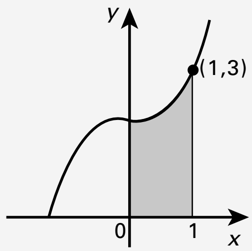
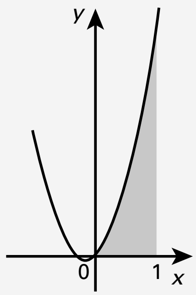
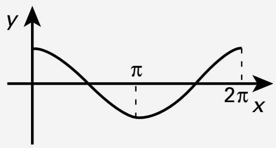
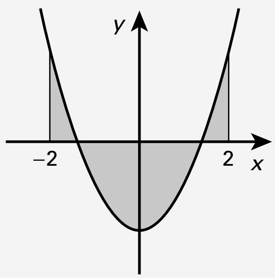


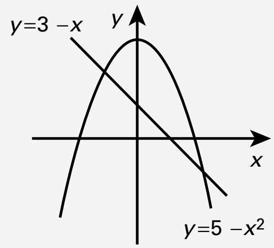
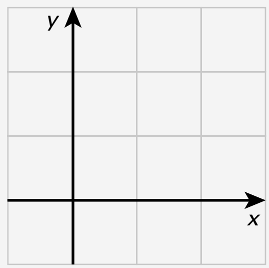
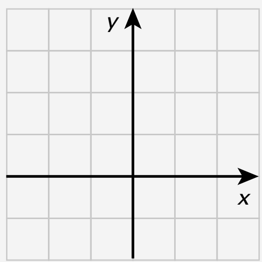
$$A = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - 2x\right)dx + \int_{0}^{2}\left(2x - x^2\right)dx + \int_{2}^{3}\left(x^2 - 2x\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

Evidencias de aprendizaje

1. Halla el área comprendida entre la gráfica de $y = 2 + x^3$, el eje x y el intervalo [0, 1].	
Respuesta	$\frac{9}{4}$
2. Encuentra el área comprendida entre la gráfica de $y = 3x^2 + x$, el eje x y el intervalo [0, 1].	
Respuesta	
3. Calcula el área comprendida entre la gráfica de $y = \cos x$, el eje x y el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Sombrea en la gráfica el área obtenida.	
Respuesta	2
4. Halla el área comprendida entre la gráfica de $y = x^2 - 2$, el eje x y el intervalo [–2, 2].	
Respuesta	

<table>
<tr><td>5. Calcula y sombrea la región limitada por las curvas $y = 5 - x^2$ y $y = 3 - x$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>4.5</td></tr>
<tr><td>6. Halla el área comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$. Bosqueja las funciones.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td></td></tr>
<tr><td>7. Halla el área comprendida entre las gráficas de $y = x^2$ y la recta $y = 3$. Bosqueja las funciones.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>6.9282</td></tr>
</table>

Winplot

Secuencia didáctica. Los pasos que debes seguir para graficar, obtener los puntos de intersección y el área entre dos funciones son:
Por ejemplo, para hallar el área de la región entre las funciones y = sen x y $y = \cos x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$.

Primera función

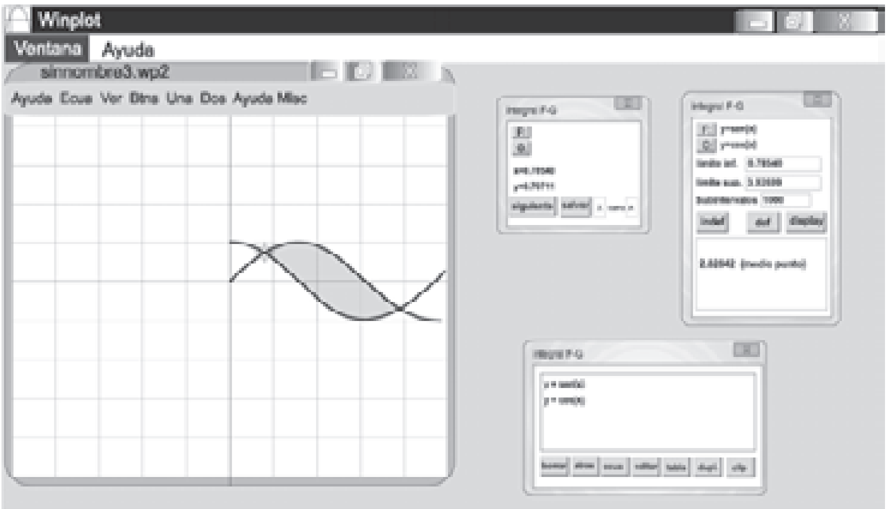
Ventana → 2dim → Ecuación → Explícita → y = sen (x) → lím. inf. = 0 → lím. sup. = 2pi → Ok

Segunda función

Ecuación → Explícita → y = cos (x) → lím. inf. = 0 → lím. sup. = 2pi → Ok

Intersección y área

Dos → Intersección → Siguiente → Integrar → lím. inf. = 0.7854 → lím. sup. = 3.92699 → Definida



¡Este es un bosquejo de la pantalla final!

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 3

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca 😐 **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

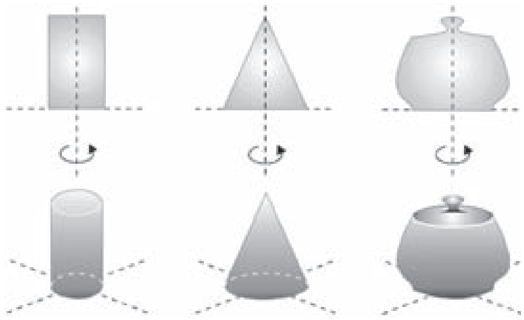
¿Al finalizar el bloque adquiriste las habilidades metacognitivas que te permiten	
• investigar los antecedentes de la integral definida?	
• relacionar el área bajo una curva con la integral definida?	
• comprender la importancia de las sumas de Riemann como un límite?	
• resolver problemas de áreas mediante las sumas de Riemann?	
• comprender la importancia que tienen las sumas de Riemann en la definición de integral definida?	
• evaluar integrales definidas?	
• construir modelos matemáticos de situaciones reales con la integral definida?	
• evaluar integrales definidas con el *software* sugerido?	
• calcular el área entre dos curvas?	
• aplicar la integral definida en situaciones de la vida cotidiana?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste. Tu calificación va de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

BLOQUE 4

Áreas y volúmenes



Al girar las superficies de la parte superior de la figura sobre un eje vertical se generan los volúmenes sólidos de revolución de la parte inferior.

Desempeños del estudiante al concluir el bloque

- Aplica el concepto de sólido de revolución en el diseño de envases, depósitos y contenedores en general, y de formas homogéneas y heterogéneas.
- Aplica las integrales definidas en la solución de problemas de leyes de Newton (centro de masa o gravedad) y crecimientos exponenciales, resolviéndolos de manera autónoma con la utilización de los procesos aprendidos.

Objetos de aprendizaje

- Calculo de áreas y volúmenes de sólidos de revolución.
- Aplicaciones de la ley de Newton y crecimientos exponenciales.
- Oferta y demanda en Economía, Administración y Finanzas.

Competencias a desarrollar

- Identifica casos factibles de aplicación de la integral definida en el ámbito de las ciencias exactas, naturales y sociales.
- Aplica la integral definida para resolver problemas en el campo de las matemáticas, las ciencias naturales y las económico-administrativas.
- Valora el uso de las TIC como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de aplicación de integrales definidas en cualquier contexto de la disciplina.

Actividades de enseñanza

- Promover el cálculo de volúmenes y superficies de sólidos de revolución mediante la aplicación de la integral definida, apoyándose en el material de la página: http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Casquetes_cilindricos/Pags/Texto.htm#Animaci
- Consultar las siguientes lecturas: http://www.imposible.cl/crisol12/wp-content/uploads/2010/11/SOLIDOS DEREVOLUCION1.pdf y http://www.amolasmates.es/pdf/Temas/2BachCT/Integral%20definida.pdf
- Promover el cálculo de valores de variables cinemáticas y/o dinámicas (centro de masa, trabajo realizado por una fuerza, movimiento de partículas) mediante la aplicación de la integral definida, apoyar en el material de una página electrónica de su elección y en libros relacionados con el tema.
- Promover el cálculo de procesos económicos/administrativos/financieros mediante la aplicación de la integral definida, apoyar en el material de la página electrónica de su elección y en libros relacionados con el tema.
- Presentar en multimedia los campos de aplicación del cálculo integral para motivar a los alumnos en la resolución de problemas. Proponer un bloque misceláneo de problemas reales multidisciplinarios, aplicables en su entorno; al mismo tiempo, solicitar un proyecto donde se promueva la investigación de campo y se evidencie el dominio de los conocimientos, habilidades y actitudes considerados en el curso, y su movilización en forma pertinente y en el momento oportuno.
- Orientar la búsqueda de información en Internet para abordar la solución de problemas reales en su entorno, factibles de modelarse mediante integrales definidas.

Actividades de aprendizaje

- Investigar en Internet y en fuentes bibliográficas tradicionales, para complementar la información referente a los volúmenes y superficies de sólidos de revolución y su cálculo mediante integrales definidas. Elaborar un resumen de la información obtenida, anexando las conclusiones y destacando su aplicación e importancia en situaciones reales del entorno.
- Investigar en Internet y en fuentes bibliográficas tradicionales, para complementar la información referente a los temas de cinemática y dinámica elegidos (centro de masa, trabajo realizado por una fuerza, movimiento de

partículas), y su cálculo mediante integrales definidas. Elaborar un resumen de la información obtenida, anexando tus conclusiones y destacando su aplicación e importancia en situaciones reales de tu entorno.

- Investigar en Internet y en fuentes bibliográficas tradicionales, para complementar la información referente a los temas económicos/administrativos/financieros y su cálculo mediante integrales definidas. Elaborar un resumen de la información obtenida, anexando sus conclusiones y destacando su aplicación e importancia en situaciones reales de tu entorno.
- Resolver en equipos el bloque misceláneo de problemas reales multidisciplinarios. Elegir uno de acuerdo con el criterio del estudiante, y apoyándose en éste formular un proyecto de aplicación en su entorno inmediato. Este proyecto consistirá en una presentación multimedia que describa cada una de sus fases, documentándolas y registrando sus evidencias en una bitácora.
- Valorar el uso de las TIC como herramientas para la solución de problemas reales del entorno, factibles de modelarse mediante integrales definidas.

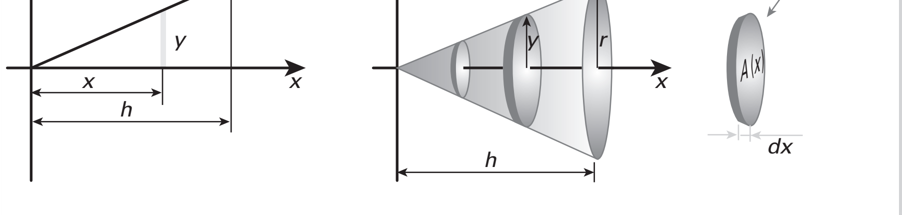
Volumen de un sólido

Desarrolla tus competencias

Si analizas las fases de la siguiente figura, es fácil darse cuenta que cuando se gira la región que está debajo de la recta $y = \frac{r}{h}x$, alrededor del eje x, se obtiene un sólido de revolución que conocemos como cono.

La idea es que utilices la definición de **integral definida** para demostrar que el volumen de un cono de radio r y altura h es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Secuencia didáctica

- Imagina que divides en un gran número de rebanadas o discos el sólido que resulta al girar la región debajo de la recta en el intervalo [0, *h*].
- El volumen de los discos de radio variable y es $dV = A(x)dx = \pi y^2 dx$. (Observa que $y = \frac{r}{h}x$).
- Por definición, el volumen del cono es la suma total de los volúmenes de los discos, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2 \Delta x = \int_0^h \pi\ y^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$$

- Resuelve esta última expresión.

Cálculo de volúmenes

Método de los discos

Cuando giramos la región de área que está debajo de una función alrededor del eje x, o algún otro eje determinado, lo que estamos obteniendo es un **sólido de revolución**. El volumen de este sólido también se obtiene con la integral:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

Esto es porque siempre vamos a girar una superficie y tendremos invariablemente como elementos de sección pequeños cilindros de área, πr^2.

Ejemplos

1. **Volumen del cono circular.** Demostrar que el volumen de un cono cuyo radio de la base es r y altura h viene dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h$$

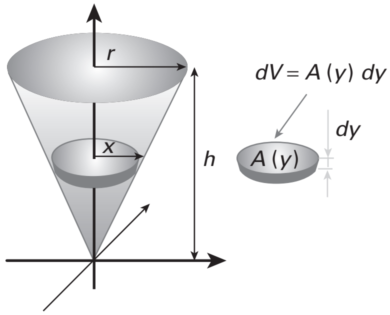
y que se genera al girar una recta de pendiente $m = \frac{h}{r}$ alrededor del eje y.

Solución
El sólido resultante al girar la región formada por la recta $y = \frac{h}{r}x$, el eje y y la recta $y = h$ es el que se muestra en la figura, y es evidente que las rebanadas o discos son perpendiculares al eje y, de modo que si:

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$$y = f(x) = \frac{h}{r}x$$



entonces el volumen es:

$$V = \int_0^h A(y)\,dy = \int_0^h \pi\, x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^h \left[\frac{r}{h} y\right]^2 dy$$

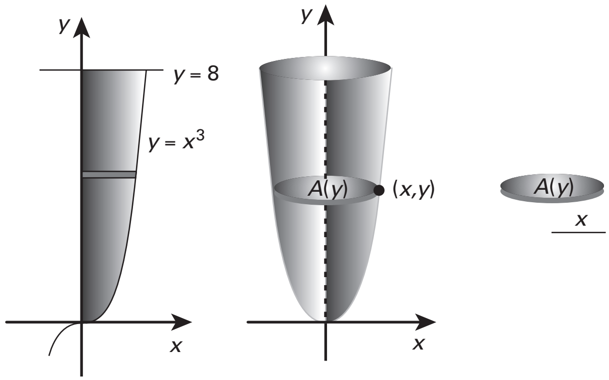
$$= \frac{\pi\, r^2}{h^2} \int_0^h y^2 dy = \left[\frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{y^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi\, r^2}{h^2} \left[\frac{h^3}{3} - 0\right] = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

2. Encontrar el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región limitada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$, alrededor del eje y.

Solución
El sólido resultante al girar la región de la función es el que se muestra en la figura, y es evidente que las rebanadas o discos son perpendiculares al eje y, de modo que si:

$y = x^3$, entonces $x = y^{1/3}$ (en este caso x es el radio).



Por tanto, el volumen del sólido generado es:

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi \left[y^{\frac{1}{3}}\right]^2 dy$$

$$= \int_0^8 \pi y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy$$

$$= \pi \left[\frac{3y^{5/3}}{5} \right]_0^8 = \pi \left[\frac{3}{5} \sqrt[3]{8^5} \right]$$

$$= \frac{96}{5} \pi$$

3. Hallar el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$, en torno al eje x.

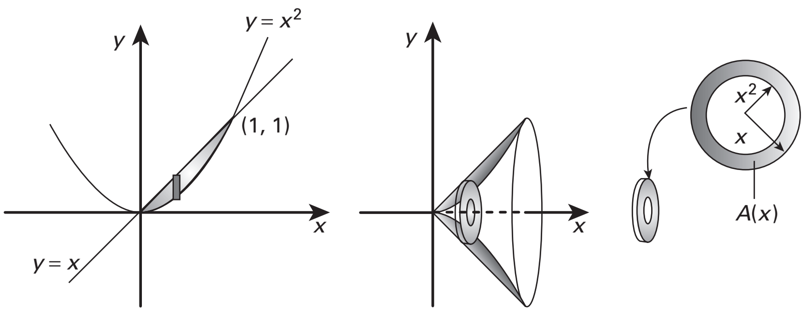
Solución
Al resolver simultáneamente las ecuaciones obtenemos los puntos de intersección de las gráficas y son (0, 0) y (1, 1). En la figura de abajo se muestra la región entre ellas, el sólido generado y una sección transversal de radios x y x^2, respectivamente, de modo que el área de la sección tiene forma de **anillo o arandela**. El área de dicha sección es:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi \left(x^2\right)^2 = \pi \left(x^2 - x^4\right)$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es:

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi \left(x^2 - x^4\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15} \pi$$

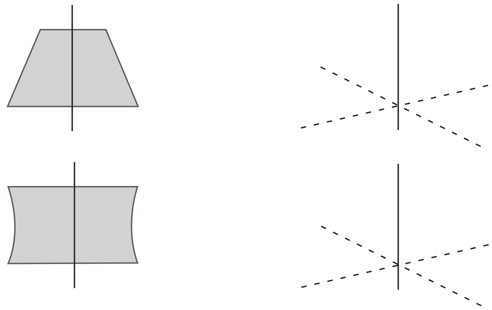


Nota. Observa que el resultado sería el mismo si primero se obtiene el volumen del sólido que se genera cuando giramos la recta $y = x$ alrededor del eje x, y luego restamos el valor del volumen sólido generado al hacer lo propio con la parábola $y = x^2$, es decir:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx$$

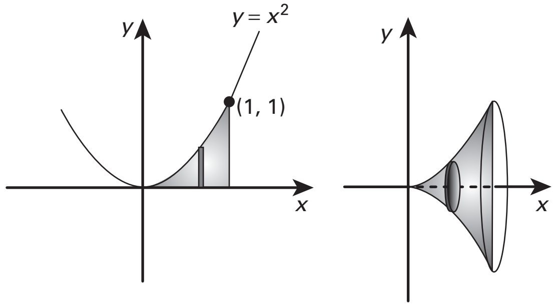
Autoevaluación

Traza un esquema del sólido de revolución que se genera al girar la región sombreada alrededor de su eje vertical.



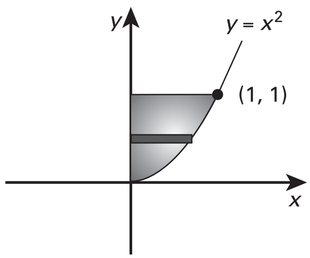
Evidencias de aprendizaje

1. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$ alrededor del eje x.



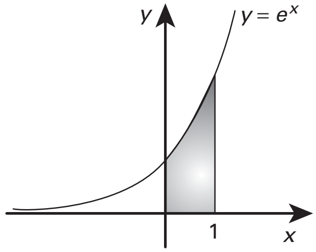
R. $\dfrac{\pi}{5}$

2. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$ alrededor del eje y. Traza un esquema del sólido que se genera.

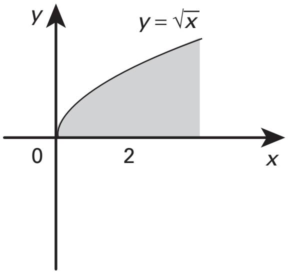


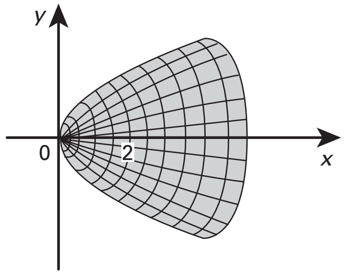
3. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ alrededor del eje x. Traza un esquema del sólido que se genera.

R. $\frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$



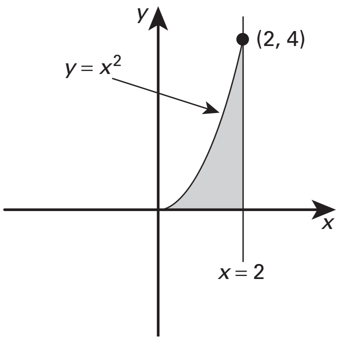
4. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por $y = \sqrt{x}$, $x = 2$, $y = 0$ alrededor del eje x.

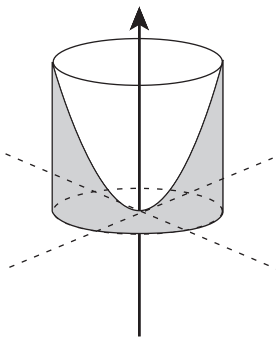




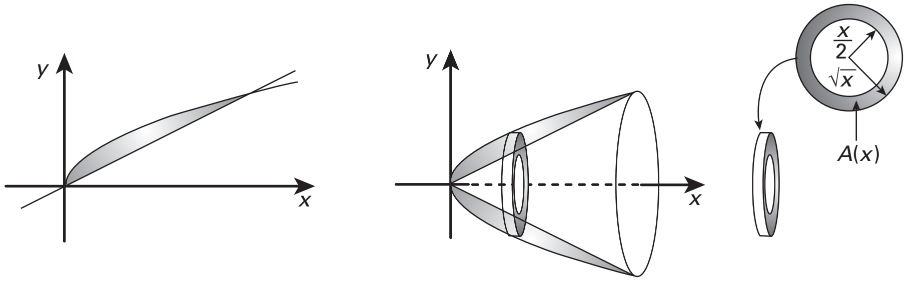
5. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$ alrededor del eje y.

R. 8π



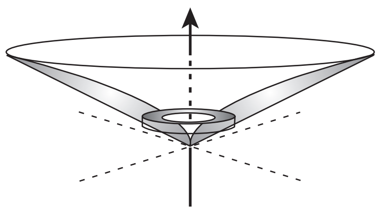


6. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por $y=\sqrt{x},\ \ y=\dfrac{1}{2}x$ alrededor del eje x.

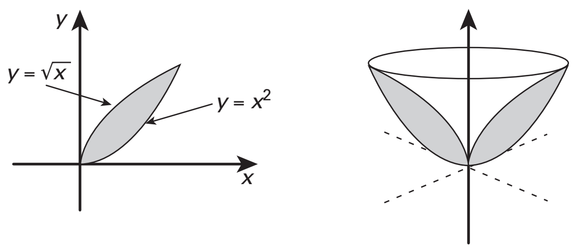


7. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por $y=\sqrt{x},\ \ y=\dfrac{1}{2}x$ alrededor del eje y.

R. $\dfrac{64}{15}\pi$

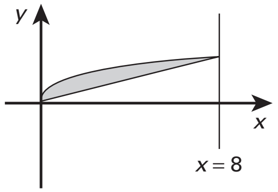


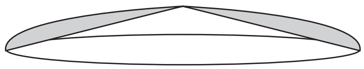
8. Halla el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por las curvas $y=\sqrt{x}$ y $y=x^2$ alrededor del eje y.



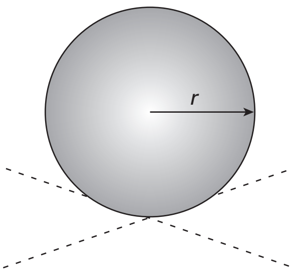
9. Encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región formada por $y=\dfrac{1}{4}x$ y $y=\sqrt[3]{x}$ alrededor de la recta $x=8$. Observa en la figura que el radio de los discos de la sección para la recta es $8 - 4y$, y para la otra curva es $8 - y^3$.

R. $\dfrac{832}{21}\pi$

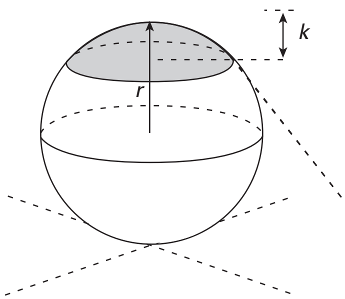




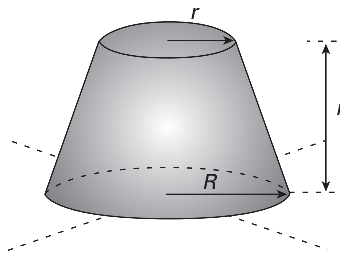
10. Demuestra que el volumen de una esfera de radio r viene dado por $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Recuerda que la ecuación de una circunferencia de centro en el origen es $x^2 + y^2 = r^2$.



11. Demuestra que el volumen V de un casquete de una esfera con radio r y altura k es $V = \dfrac{1}{3}\pi k^2\left(3r - k\right)$.



12. Encuentra el volumen del tronco de un cono circular recto con altura h, radio de la base inferior R y radio de la parte superior r.



Aplicaciones de la ley de Newton

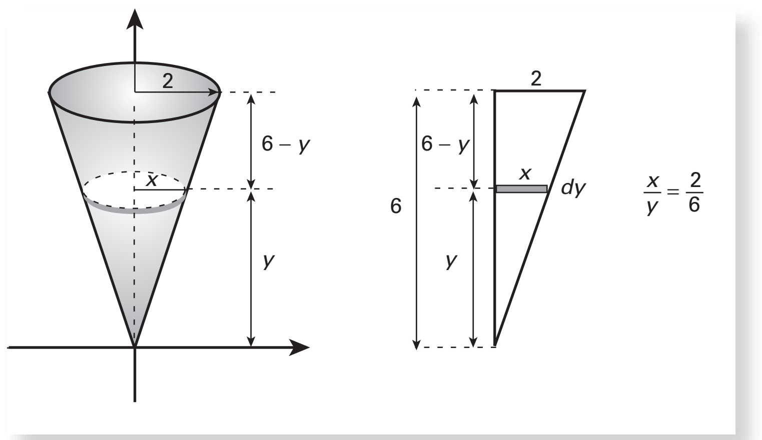
1. **Trabajo para bombear un fluido.** Un contenedor tiene la forma de un cono circular con una altura de 6 m y radio de la base de 2 m. (La densidad del agua es 1000 kg/m^3).

   a) Encuentra el trabajo realizado para bombear agua hasta el borde superior del depósito.

   b) ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el agua a una altura de 4 metros por encima del borde superior del contenedor?

   Solución

   a) Posicionamos el cono en un sistema de coordenadas cartesianas, como se muestra en la figura adjunta. Imaginemos discos horizontales de agua, muy delgados, con sección perpendicular al eje y y altura dy, los cuales deben ser elevados al borde del depósito.



El volumen de los discos en mención es $\pi x^2\,dy$, y si consideramos los triángulos semejantes a la derecha del cono podemos escribir x como función de y de la siguiente manera:

$$x = \frac{2}{6}y = \frac{1}{3}y$$

Entonces el volumen de las rebanadas de agua del cono en función de y es $\pi\left(\frac{1}{3}y\right)^2 dy$.

La fuerza necesaria para elevar los discos de agua es el peso de éstos (*masa por gravedad = densidad por volumen por gravedad*), y deben subirse una distancia de $6 - y$ metros. Por lo tanto, el trabajo aproximado W que se realiza sobre estos discos es:

$$W = \int_0^6 \underbrace{1000}_{\text{densidad}}\,\underbrace{\pi\left(\tfrac{1}{3}y\right)^2 dy}_{\text{volumen}}\,\underbrace{(9.8)}_{\text{gravedad}}\,\underbrace{(6-y)}_{\text{distancia}} = \frac{9800}{9}\pi\int_0^6\left(6y^2 - y^3\right)dy = \frac{9800}{9}\pi\left[2y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^6$$

$$W = \frac{9800}{9}\pi\left[2(6)^3 - \frac{1}{4}(6)^4\right] = 117600\pi \text{ joules.}$$

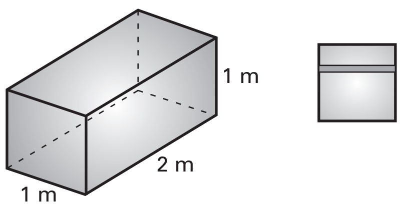
b) La solución es análoga, sólo que los discos de agua deberán elevarse una distancia de $(6-y)+4 = 10-y$ metros, de manera que el trabajo es:

$$W = \int_0^6 1000\pi\left(\tfrac{1}{3}y\right)^2(9.8)(10-y)\,dy = \frac{9800}{9}\pi\int_0^6\left(10y^2 - y^3\right)dy = \frac{9800}{9}\pi\left[\frac{10}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^6$$

$$W = \frac{9800}{9}\pi\left[\frac{10}{3}(6)^3 - \frac{1}{4}(6)^4\right] = 431200\pi \text{ joules.}$$

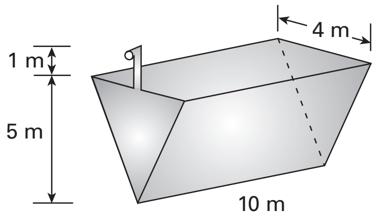
Evidencias de aprendizaje

1. Un depósito que mide 2 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de profundidad está lleno de agua. Encuentra el trabajo necesario para sacar, bombeando, la mitad del agua. (La densidad del agua es 1000 kg/m^3).



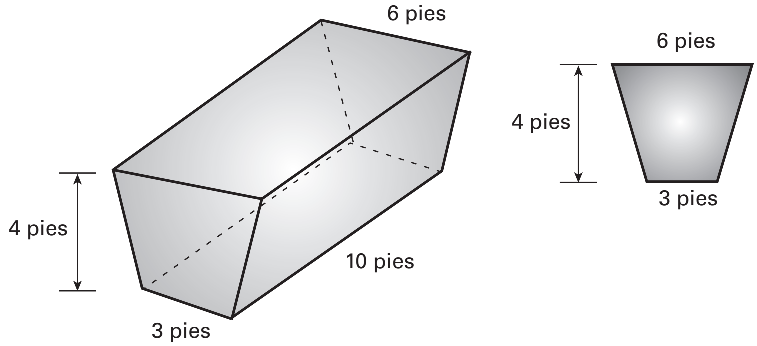
R. 2 450 J

2. El tanque de la figura está lleno de agua. Encuentra el trabajo requerido para bombearla por el tubo de salida.

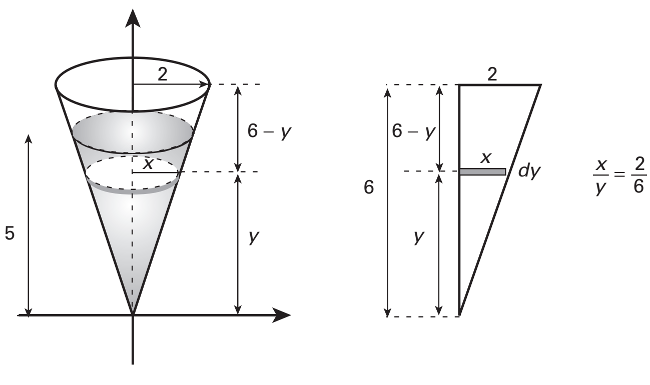


3. El tanque de la figura está lleno de agua. Encuentra el trabajo requerido para bombearla a una altura de 5 pies por arriba del borde del depósito. (La densidad del agua es 62.4 libras por pie cúbico).

R. 76 128 pies - libras

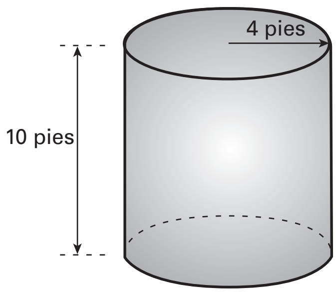


4. Un tanque tiene la forma de un cono circular con una altura de 6 metros y radio de la base de 2 metros. Se llena con agua hasta una altura de 5 metros. Encuentra el trabajo realizado para bombear el agua hasta el borde superior del depósito. (La densidad del agua es 1000 kg/m^3).



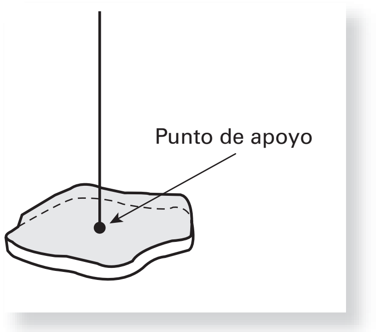
5. Encuentra el trabajo realizado al bombear todo el aceite sobre el borde de un cilindro circular apoyado sobre su base. El radio de la base es de 4 pies, y su altura de 10. (La densidad del aceite es de 50 libras por pie cúbico).

R. $40\,000\ \pi$ pies - libras



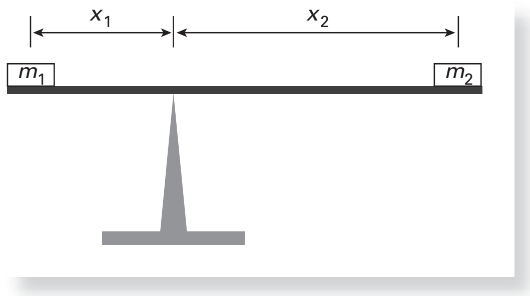
Momentos y centros de masa

La idea central de esta sección es encontrar el punto de apoyo para que la masa de un cuerpo se equilibre horizontalmente. Este punto se llama **centro de masa o centro de gravedad** de los cuerpos.

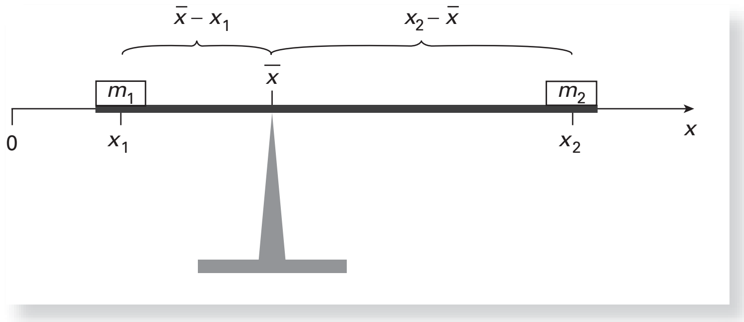


Si por ejemplo, experimentamos con una barra de peso despreciable y cargamos dos masas m_1 y m_2 en los lados opuestos del punto de apoyo (fulcro), a distancias x_1 y x_2, respectivamente, la barra, al igual que una balanza, se equilibra cuando:

$$m_1 x_1 = m_2 x_2$$



Si hacemos coincidir la barra del experimento anterior con el eje x y le asignamos la coordenada $\overline{x}$ al punto de apoyo, entonces el resultado es la siguiente figura:



Podemos concluir fácilmente que la ecuación de equilibrio en estas circunstancias queda como:

$$m_1\left(\overline{x}-x_1\right)=m_2\left(x_2-\overline{x}\right)$$

$$m_1\overline{x}-m_1x_1=m_2x_2-m_2\overline{x}$$

Si agrupamos los términos que tienen $\overline{x}$ y resolvemos la ecuación para esta variable lo que obtenemos es el centro de masa del sistema con respecto al origen de coordenadas, es decir:

$$\overline{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{\sum_{i=1}^{2}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{2}m_i}$$

Los términos m_1x_1 y m_2x_2 se conocen como los **momentos de masa** de m_1 y m_2, respectivamente.

En general se puede comprobar que si se tienen n partículas en el plano cartesiano con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ y posicionadas en los puntos $\left(x_1, y_1\right)$, $\left(x_2, y_2\right)$,

… , (x_n, y_n), respectivamente, generan el **momento del sistema respecto del eje** y (tendencia a girar en torno a y):

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

y el **momento del sistema con respecto al eje** x (tendencia a girar en torno a x):

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Por lo tanto, las **coordenadas de masa** $(\overline{x}, \overline{y})$ del sistema en el plano cartesiano son:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

Donde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Ejemplo

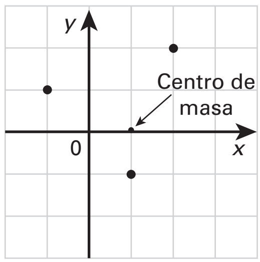
Encuentra el centro de masa del sistema de partículas que tienen masas 2, 4 y 9 en los puntos $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$ y $(1,\ -1)$.

Solución
Primero calculamos los momentos de masa M_y y M_x.

$$M_y = 2(-1) + 4(2) + 9(1) = 15$$
$$M_x = 2(1) + 4(2) + 9(-1) = 1$$

La masa del sistema es $m = 2 + 4 + 9 = 15$ y las coordenadas de su centro están en:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{15}{15} = 1 \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{15}$$



Por lo tanto, el centro de masa está en $\left(1,\ \frac{1}{15}\right)$.

De manera análoga se puede concluir que al igual que para un sistema de partículas, el centro de masa de una placa situada en el plano de densidad uniforme ρ, masa m y área A (también suele llamarse *centroide*), se puede calcular con las expresiones:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\left[f(x)\right]^2 dx$$

Ejemplos

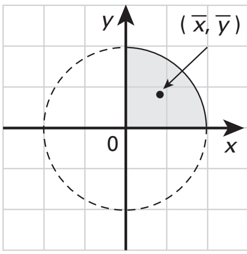
1. Hallar el centro de masa de una placa que tiene la forma de la cuarta parte de una circunferencia de radio 2, y que está ubicada en el primer cuadrante.

Solución
Colocamos la placa en el plano cartesiano y recordamos que la ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. Si despejamos y tenemos la función que necesitamos:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

El área de la región es la superficie de la circunferencia entre 4:

$$A = \frac{\pi(2)^2}{4} = \pi$$



Entonces las coordenadas del centro de masa están en:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{8}{3\pi}$$

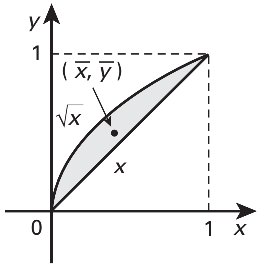
Podemos calcular $\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2 dx$, pero por simetría es evidente que $\bar{y} = \frac{8}{3\pi}$, como se muestra en la figura.

2. Hallar el centroide de la región formada por las curva $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x$.

Solución

Resolviendo de manera simultánea los puntos de intersección se encuentran en $(0,0)$ y $(1,1)$. Graficando, claramente se aprecia que el área A de la placa es igual a la diferencia entre las áreas $A_f - A_g$, o sea,

$$A=\int_0^1 \left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^2\left(\sqrt{x}-x\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$



Con este referente se puede comprobar que el centroide de la placa se puede obtener con:

$$\boxed{\begin{gathered}\bar{x}=\frac{1}{A}\int_a^b x\left[f(x)-g(x)\right]dx\\ \text{y}\\ \bar{y}=\frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\left(\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right)dx\end{gathered}}$$

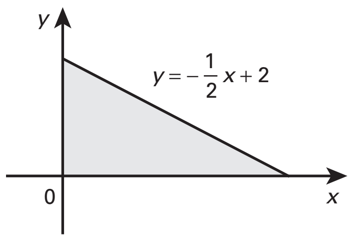
Por lo tanto, los centros de masa de la placa están en:

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\int_0^1 x\left[f(x)-g(x)\right]dx=\frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-x\right)dx=6\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=6\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right]=\frac{2}{5}$$
$$\bar{y}=\frac{1}{A}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right)dx=6\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(\left[\sqrt{x}\right]^2-\left[x\right]^2\right)dx=3\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

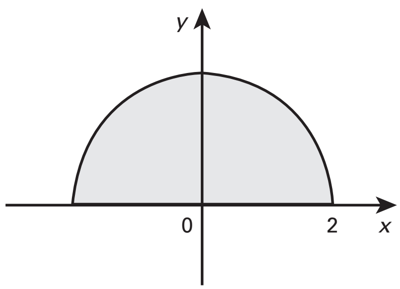
De manera que las coordenadas del centroide están en $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$.

Evidencias de aprendizaje

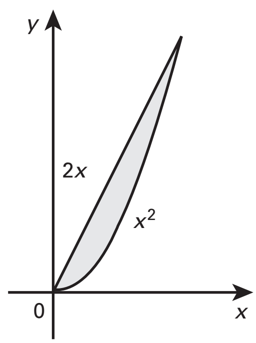
1. Encuentra el centro de masa del triángulo rectángulo formado por la recta $y=-\frac{1}{2}x+2$ y los ejes coordenados.



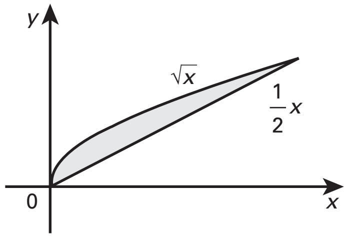
2. Calcula el centro de masa de una placa semicircular de radio 2.



3. Calcula el centro de masa de la región limitada por las funciones $f(x)=2x$ y $g(x)=x^2$.

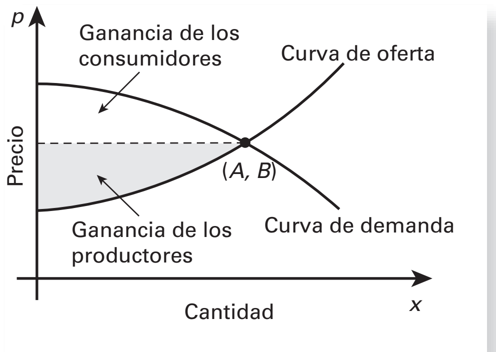


4. Calcula el centro de masa de la región limitada por las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\frac{1}{2}x$.



Oferta y demanda de un producto

Para un producto particular, la cantidad producida A y el precio por unidad B están dados por el punto de intersección de sus respectivas curvas de **oferta y demanda** (punto de equilibrio). Por lo tanto, a partir de sus respectivas gráficas podemos identificar el área de ganancia de los consumidores y el área de oportunidad para los productores.



Ejemplos

1. Encuentra la ganancia de los consumidores para la curva de demanda $p=40-0.03x^2$ cuando el nivel de ventas está en 20 unidades.

Solución
Cuando el nivel de ventas A es de 20 unidades, de acuerdo con la función de demanda el precio B es:

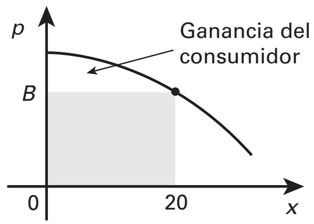
$$B=40-0.03(20)^2=28$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

La ganancia del consumidor es el área bajo la curva de demanda en el intervalo [0, 20] menos el área del rectángulo que está sombreada, y numéricamente es:

$$\begin{aligned}\int_0^{20}\left(40-0.03x^2\right)dx-\left[20\times 28\right]&=\left[40x-0.01x^3\right]_0^{20}-560\\&=\left[40\left(20\right)-0.01\left(20\right)^3\right]-560\\&=160\end{aligned}$$



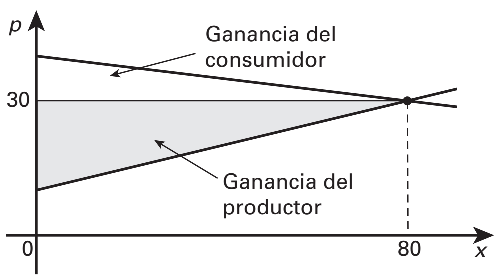
Curva de demanda

Esto significa que la ganancia del consumidor es de $160.

2. Determina el punto de intersección de la curva de demanda $p=40-\frac{1}{8}x$ con la curva de oferta $p=10+\frac{1}{4}x$. También calcula la ganancia de los consumidores y de los productores.

Solución

El **punto de intersección** se calcula resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la oferta y la demanda.



Por igualación tenemos que

$$40-\frac{1}{8}x=10+\frac{1}{4}x$$

$320 - x = 80 + 2x$ Multiplicando por 8

$2x + x = 320 - 80$ Trasponiendo términos

$3x = 240$

Resolviendo la ecuación tenemos que $x = 80$ y $p = 10 + \frac{1}{4}(80) = 30$. Por lo tanto, el punto de equilibrio está en $(80,\ 30)$.

La **ganancia del consumidor** según la gráfica es:

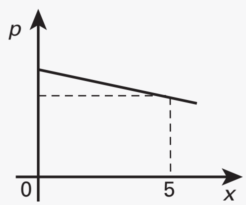
$$\int_0^{80}\left(40 - \frac{1}{8}x\right)dx - \left[80 \times 30\right] = \left[40x - \frac{1}{16}x^2\right]_0^{80} - 2400 = 2800 - 2400 = 400$$

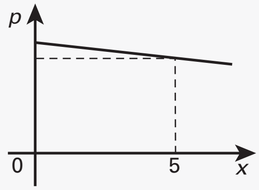
La **ganancia del productor** según la gráfica es:

$$\left(80 \times 30\right) - \int_0^{80}\left(10 + \frac{1}{4}x\right)dx = 2400 - \left[10x + \frac{1}{8}x^2\right]_0^{80} = 2400 - 1600 = 800$$

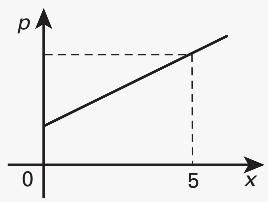
Evidencias de aprendizaje

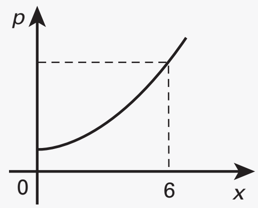
1. Encuentra la ganancia de los consumidores para cada una de las siguientes curvas de demanda de acuerdo con el nivel de ventas dado. Sombrea el área respectiva.

a) $p = 4 - \frac{1}{5}x$; para $x = 5$	
Respuesta	2.5

b) $p = \sqrt{16 - 0.8x}$; para $x = 5$	
Respuesta	1.37181

2. Encuentra la ganancia de los productores para cada una de las siguientes curvas de oferta de acuerdo con el nivel de ventas dado. Sombrea el área respectiva.

a) $p = 0.4x + 1$; para $x = 5$	
Respuesta	

b) $p=\frac{1}{9}x^2+1$; para $x=6$	
Respuesta	

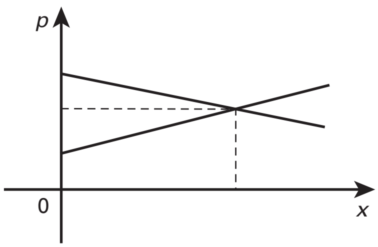
3. Encuentra el punto de intersección de las curvas de oferta y demanda, junto con la ganancia de los productores y los consumidores.

Curva de demanda
$p = 3.2 - 0.2x$
Curva de oferta
$p = 1 + 0.25x$

R. Intersección: (4.89, 2.23)

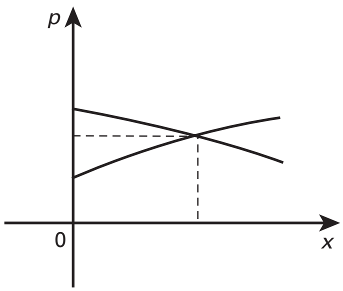
G. consumidor: 2.35216

G. productor: 3.02560



4. Encuentra el punto de intersección de las curvas de oferta y demanda, junto con la ganancia de los productores y los consumidores.

Curva de demanda
$p=\sqrt{7-x}$
Curva de oferta
$p=\sqrt{x+1}$



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 4

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

¿Al finalizar el bloque adquiriste las habilidades metacognitivas que te permiten	
• bosquejar un sólido al revolucionar una superficie alrededor de un eje?	
• calcular volúmenes de sólidos de revolución?	
• identificar casos factibles para aplicar la integral definida?	
• demostrar fórmulas conocidas para obtener volúmenes como de un cono o una esfera?	
• aplicar el concepto de integral definida para calcular el trabajo realizado al bombear un fluido?	
• construir modelos matemáticos de situaciones reales?	
• comprender el concepto de centro de masa?	
• calcular el centro de masa de un objeto?	
• identificar el punto de equilibrio de la oferta y la demanda de un producto?	
• calcular la ganancia de un productor o de un consumidor?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste. Tu calificación va de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Apéndice

Más técnicas de integración

Integrales de potencias de funciones trigonométricas

En esta sección nos apoyaremos de manera fundamental en las identidades trigonométricas para poder integrar algunas combinaciones de funciones trigonométricas. Iniciaremos con las potencias de la forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$$

en donde $m \geq 0$ y $n \geq 0$ son enteros, y m o n es impar.

a) Si n es un número **impar**, utilizaremos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y apartaremos un factor del coseno.

Ejemplos

1. Evalúa $\int \cos^3 x dx$

Solución

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx$$ Apartamos un factor del coseno

$$= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x dx$$ Utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

Luego, si hacemos $u = \operatorname{sen} x$ y $du = \cos x dx$ tendremos que:

$$\int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x dx = \int \left(1 - u^2\right) du$$

$$= u - \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \operatorname{sen} u - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 u + C$$ Reemplazando $u = \operatorname{sen} x$

b) Cuando la potencia m del seno es **impar**, se aparta un factor del seno y se usa $\operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2 x$ y los demás términos se expresan en función del coseno.

2. Evalúa $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$

Solución

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \operatorname{sen} x dx \qquad \text{Apartamos un factor del seno}$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x \operatorname{sen} x dx \qquad \text{Utilizamos la identidad } \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Luego, si hacemos $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x dx$ entonces $-du = \operatorname{sen} x dx$, por tanto:

$$\begin{aligned}
\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x \operatorname{sen} x dx &= \int \left(1-u^2\right) u^4 \left(-du\right) \\
&= -\int \left(u^4 - u^6\right) du \\
&= -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C \\
&= \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 u + C \qquad \text{Reemplazando } u = \cos x
\end{aligned}$$

c) En los casos en que tanto el seno como el coseno tienen potencias pares aplicaremos las identidades de mitad de ángulo:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$$

3. Evalúa $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx$

Solución

En este caso podemos observar que $m = 2$ y $n = 0$ y usando una de las fórmulas de mitad de ángulo para $\operatorname{sen}^2 x$.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2x\right)dx \qquad \text{Usando } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

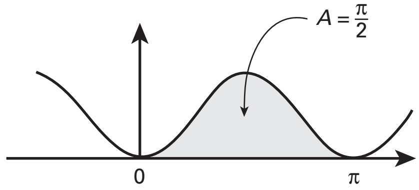
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx - \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x dx \qquad \text{Separamos en dos integrales}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$$= \frac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \frac{1}{2}\pi$$



Gráfica de la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\pi$

Comprueba tus habilidades

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

Integral	Solución
1. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x dx$	*R.* $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$
2. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$	
3. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$	*R.* $\frac{\pi}{2}$
4. $\int \operatorname{sen}^2 3x dx$	
5. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx$	*R.* $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C$
6. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$	
7. $\int (1 - \operatorname{sen} 2x)^2 dx$	*R.* $\frac{3}{2}x + \cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$
8. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$	
9. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x dx$	*R.* $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^8 x + C$
10. $\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x} dx$	

11. $\int \operatorname{sen}^3 x dx$	*R.* $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$
12. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$	
13. $\int \cos^3 x dx$	*R.* $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$
14. $\int (1-\cos x)^2 dx$	
15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$	*R.* $\frac{2}{3}$

En los casos en que queramos determinar integrales de la forma:

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

Procederemos de la siguiente manera:

a) Cuando la potencia de la secante es **par**, se separa de ésta un factor $\sec^2 x$ y se usa la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ con el propósito de expresar los demás factores en términos de $\tan x$.

Ejemplos

1. Evalúa $\int \tan^4 x \sec^4 x dx$

Solución
Como la secante tiene exponente par, sacaremos $\sec^2 x$ como un factor común del integrando y enseguida utilizaremos $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$:

$$\int \tan^4 x \sec^4 x dx = \int \tan^4 x \sec^2 x \sec^2 x dx \qquad \text{Apartamos un factor } \sec^2 x$$

$$= \int \tan^4 \left(1+\tan^2 x\right)\sec^2 x dx \qquad \text{Utilizamos la identidad } \sec^2 x = 1+\tan^2 x$$

Luego, si hacemos $u = \tan x$, y $du = \sec^2 x dx$ entonces:

$$\int \tan^4 x\left(1+\tan^2 x\right)\sec^2 x dx = \int u^4\left(1+u^2\right)du$$

$$= \int \left(u^4+u^6\right)du$$

$$= \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{7}u^3 + C$$

$$= \tfrac{1}{5}\tan^5 x + \tfrac{1}{7}\tan^7 x + C \qquad \text{Reemplazando } u = \tan x$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

b) Si la potencia de la tangente es **impar** se aparta un factor sec x tan x del integrando y se hace la sustitución $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los factores restantes en términos de sec x.

2. Evalúa $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

Solución

Como la tangente tiene una potencia impar, sacaremos sec x tan x como un factor común del integrando y enseguida utilizaremos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, para expresar todo en términos de sec x:

$$\int \tan^3 x \sec^4 x = \int \tan^2 x \sec^3 x \sec x \tan x dx \qquad \text{Apartamos un factor } \sec x \tan x$$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^3 x \sec x \tan x dx \qquad \text{Utilizamos la identidad } \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

Luego, si hacemos $u = \sec x$, y $du = \sec x \tan x dx$ entonces:

$$\int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^3 x \sec x \tan x dx = \int \left(u^2 - 1\right) u^3 du$$

$$= \int \left(u^5 - u^3\right) du$$

$$= \frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= \frac{1}{6}\sec^6 x - \frac{1}{4}\sec^4 x + C \qquad \text{Reemplazando } u = \sec x$$

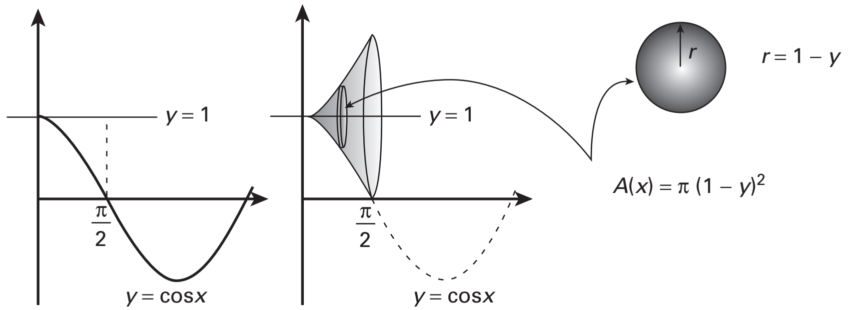
3. Calcula el volumen generado al hacer girar la región limitada por $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$; con respecto de la recta $y = 1$.

Solución

Si observas y reflexionas detenidamente acerca de la secuencia gráfica siguiente, podrás darte cuenta de que el volumen generado por la región propuesta está dado por:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A\left(x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left(1 - y\right)^2 dx$$

que es la integral que tenemos que resolver.



$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\left(1-y\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos x\right)^2 \qquad \text{Sustituyendo } y=\cos x$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos x+\cos^2 x\right)dx \qquad \text{Elevando al cuadrado } \left(1-\cos x\right)^2$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-2\cos x+\tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right]dx \qquad \text{Sustituyendo } \cos^2 x=\tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\tfrac{3}{2}-2\cos x+\tfrac{1}{2}\cos 2x\right]dx \qquad \text{Simplificando el integrando}$$

$$=\pi\left[\tfrac{3}{2}x-2\operatorname{sen}x+\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3}{2}\cdot 0-2\operatorname{sen}0+\frac{1}{4}\operatorname{sen}0\right)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{3}{4}\pi-2\left(1\right)+\frac{1}{4}\left(0\right)-\left(0-0+0\right)\right]=\frac{3}{4}\pi^2-2\pi=1.119$$

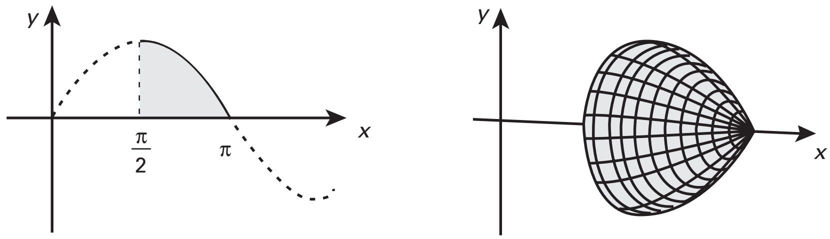
Comprueba tus habilidades

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

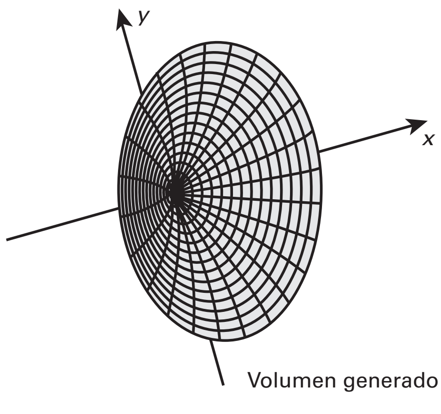
Integral	Solución
1. $\int \cos^2 x\tan^3 x dx$	*R.* $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x-\ln(\cos x)+C$
2. $\int \operatorname{sen}^2 x\cot^5 x dx$	
3. $\int \frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}dx$	*R.* $\ln\left\|\sec x+\tan x\right\|+\ln\cos x+C$
4. $\int \sec^4 x dx$	
5. $\int \sec^6 x dx$	*R.* $\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\tan x+C$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\sec^2 x dx$	
7. $\int \tan x\sec^3 x dx$	*R.* $\frac{1}{3}\sec^3 x+C$
8. $\int \frac{\sec^2 x}{\cot x}dx$	
9. $\int \frac{\csc^2 x}{\tan x}dx$	*R.* $-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$

10 a 12. Calcula el volumen generado al hacer girar la región limitada por las curvas dadas respecto del eje indicado.

10. $y = \operatorname{sen} x, \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad y = 0;$ con respecto del eje x.



11. $y = \tan^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{4};$ con respecto del eje x.



12. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2};$ con respecto de la recta $y = -1$.

Sustituciones de racionalización

Ahora vamos a estudiar integrales en donde el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{f(x)}$. En tales casos haremos la sustitución $u = \sqrt[n]{f(x)}$, que generalmente resulta muy efectiva. La idea detrás de estas sustituciones es que reemplacemos exponentes fraccionarios por exponentes enteros.

Ejemplos

1. Calcular

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Solución
Para cambiar el integrando en una función racional, hacemos:

$$u=\sqrt{x} \qquad \text{entonces} \qquad u^2=x \qquad \text{y} \qquad 2udu=dx$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2udu}{1+u} \\ &= 2\int\left(1-\frac{1}{1+u}\right)du \qquad \text{Haciendo la división} \\ &= 2u-2\ln(1+u)+C \\ &= 2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C\end{aligned}$$

> Cuando un integrando es una fracción cuyo numerador tiene un grado igual o mayor que el grado del denominador, siempre es conveniente realizar la división, de modo que:
>
> $$\frac{u}{u+1}=1-\frac{1}{u+1}$$

2. Calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

Solución
Para cambiar el integrando en una función racional, hacemos:

$$u=\sqrt[6]{x} \quad \text{entonces} \quad u^6=x \quad \text{y} \quad 6u^5\,du=dx$$

porque la *raíz sexta es común para la raíz cúbica y la raíz cuadrada*, enseguida hacemos:

$$u^2=\sqrt[3]{x} \quad \text{y} \quad u^3=\sqrt{x}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \int \frac{6u^5\,du}{u^2+u^3} = 6\int \frac{u^5}{u^2(1+u)} = 6\int \frac{u^3\,du}{1+u} \qquad \text{Simplificando la fracción}$$

$$= 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{1+u}\right)du \qquad \text{Dividiendo } \frac{u^3}{1+u}$$

$$= 6\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u - \ln(1+u)\right) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C$$

3. Calcular

$$\int \sqrt{1-e^x}\,dx$$

Solución

Para cambiar el integrando en una función racional, hacemos:

$$u = \sqrt{1-e^x}, \quad \text{entonces} \quad u^2 = 1 - e^x,\ 1 - u^2 = e^x,\ x = \ln\left(1-u^2\right) \quad \text{y} \quad dx = -\frac{2u}{1-u^2}\,du$$

Enseguida hacemos la sustitución:

$$\int \sqrt{1-e^x}\,dx = \int u\left(-\frac{2u}{1-u^2}\right)du = \int \frac{2u^2}{u^2-1}\,du \qquad \text{Cambiando de signo}$$

$$= \int \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

Dividiendo y descomponiendo en fracciones simples

$$= 2u + \ln|u-1| - \ln|u+1| + C$$

$$= 2u + \ln\frac{u-1}{u+1} + C$$

$$= 2\sqrt{1-e^x} + \ln\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} + C$$

El segundo tipo de sustitución de racionalización se aplica a expresiones racionales de senos y cosenos. Aquí se indica cómo.

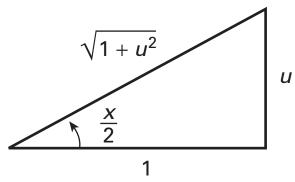
4. Calcular

$$\int \frac{1}{3\,\text{sen}\, x - 4\cos x}\,dx$$

Solución

Para cambiar expresiones racionales de senos y cosenos a funciones racionales en u, realizamos las siguientes transformaciones:

$$u = \tan\frac{x}{2},\ \text{entonces}\ \frac{x}{2} = \tan^{-1} u\ \ \text{y}\ \ dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$



$$\text{sen}\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \text{luego}\ \ \text{sen}\, x = 2\,\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ \text{luego}\ \ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Estamos usando las identidades

$$\text{sen}\, 2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3\,\text{sen}\, x - 4\cos x} = \frac{1}{3\dfrac{2u}{1+u^2} - 4\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} = \frac{1+u^2}{4u^2+6u-4}$$

luego

Factorización de $2u^2+3u-2$

$$2u^2+3u-2 = \frac{4u^2+3(2u)-4}{2} = \frac{(2u+4)(2u-1)}{2} = (u+2)(2u-1)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3\text{sen}\, x - 4\cos x}\,dx &= \int \frac{1+u^2}{4u^2+6u-4}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du \\
&= \int \frac{1}{2u^2+3u-2}\,du \\
&= \int \frac{1}{(u+2)(2u-1)}\,du \\
&= -\frac{1}{5}\int \frac{1}{u+2}\,du + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1(2)}{2u-1}\,du && \text{Fracciones simples} \\
&= -\frac{1}{5}\ln(u+2) + \frac{1}{5}\ln(2u-1) + C \\
&= \frac{1}{5}\ln\frac{2u-1}{u+2} + C && \text{Usando propiedades de logaritmos} \\
&= \frac{1}{5}\ln\frac{2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)-1}{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+1} + C && \text{Sustituyendo } u = \tan\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Comprueba tus habilidades

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

Integral	Solución
1. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$	*R.* $-2\sqrt{x}-2\ln\left(1-\sqrt{x}\right)+C$
2. $\int x\sqrt{x+1}dx$ [hacer $u^2 = x+1$].	
3. $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$	*R.* $2\sqrt{1+e^x}+\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$
4. $\int \sqrt{e^x-1}dx$	
5. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ [hacer $u^2 = x$]	*R.* $2\sqrt{x}-2\tan^{-1}\sqrt{x}+C$
6. $\int \frac{1}{2+\cos x}dx$ [hacer $u=\tan\frac{x}{2}$ y $\cos x=\frac{1-u^2}{1-u^2}$]	
7. $\int \frac{1}{1+\cos x-\operatorname{sen} x}dx$	*R.* $\ln\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)+C$
8. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$ [hacer $u^3 = x$]	
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$	*R.* $2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1}+C$
10. $\int \frac{1}{1+\cos x+\operatorname{sen} x}dx$	

Integración aproximada

Existen dos situaciones en las cuales es imposible hallar el valor exacto de una integral definida.

La primera es cuando no tenemos manera de conocer una antiderivada de $f(x)$. Por ejemplo, es imposible evaluar con exactitud las integrales:

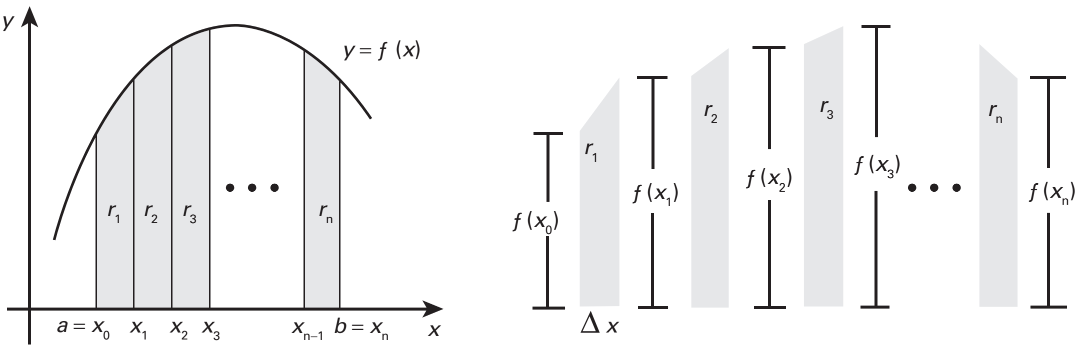
$$\int_0^1 e^{x^2}dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

La segunda surge cuando la función se determina a partir de la experimentación; es decir, cuando se recolectan los datos a través de lecturas de instrumentos, en este caso es muy posible que no haya fórmula para la función. En cualquiera de los dos casos es conveniente usar algún método de integración que tenga como referente las *sumas de Riemann*, uno de ellos es la **regla de los trapecios**.

Para comprender mejor esta situación, analicemos la figura en la parte inferior y designemos como:

A = área bajo la curva cuya función es $y = f(x)$, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$.

r_n = área de la región respectiva de cada uno de los trapecios dibujados y cuya suma es el área A.

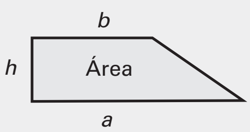


En la gráfica se destaca que las figuras geométricas que suman el área A de aproximación bajo la curva no son rectángulos de Riemann sino trapecios, y si recordamos que el área de un trapecio se obtiene con la semisuma de sus bases por la altura, entonces las áreas correspondientes a cada región son:

$$r_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\Delta x, \quad r_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\Delta x, \quad r_3 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2}\Delta x, \quad r_n = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\Delta x$$

Área de un trapecio de base mayor a, base menor b y altura h

$$\text{Área} = \frac{(a+b)}{2}h$$



Entonces el área A bajo la curva es la suma de las regiones $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$

$$A = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n$$

Al sustituir $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$

$$A = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\Delta x + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\Delta x + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\Delta x$$

Factorizando Δx y realizando la suma de los términos semejantes, el área A es:

$$A = \Delta x\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+\frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

La expresión nos enseña que cuantos más trapecios consideremos, Δx tiende a 0, $n \to \infty$ y nuestra aproximación será más precisa.

Regla de los trapecios

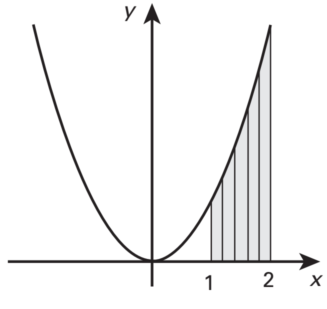
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+\frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y n es el número de trapecios.

Ejemplos

1. Aplica la regla de los trapecios con $n = 5$ para obtener una aproximación de la integral:

$$\int_1^2 x^2\,dx$$



Solución

Con $n = 5$, $a = 1$ y $b = 2$, tenemos que $\Delta x = \dfrac{2-1}{5} = 0.2$

Por tanto,

$$\int_1^2 x^2 dx \approx 0.2\left[\frac{1}{2}f(1)+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)+\frac{1}{2}f(2)\right]$$

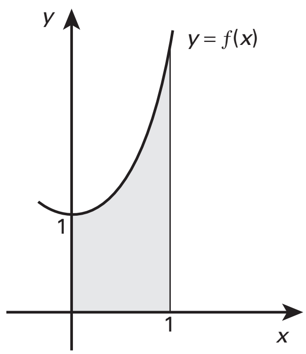
$$\approx 0.2\left[\frac{1}{2}(1)^2+(1.2)^2+(1.4)^2+(1.6)^2+(1.8)^2+\frac{1}{2}(2)^2\right]\approx 2.34$$

Ahora calcula $\int_1^2 x^2 dx$ por medio de la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

2. Aplica la regla de los trapecios con $n = 10$ para obtener una aproximación de la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$



Solución

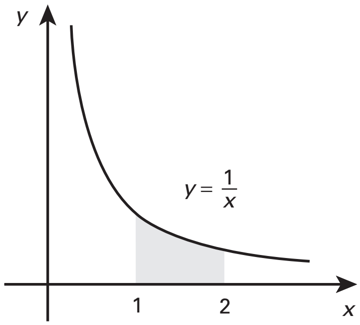
Con $n = 10$, $a = 0$ y $b = 1$, tenemos que $\Delta x = \dfrac{1-0}{10} = 0.1$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0.1\left[\frac{1}{2}f(0)+f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+\cdots+\frac{1}{2}f(1)\right]$$

$$\approx 0.1\left[\frac{1}{2}e^0+e^{0.01}+e^{0.04}+\cdots+\frac{1}{2}e^1\right]\approx 1.46265$$

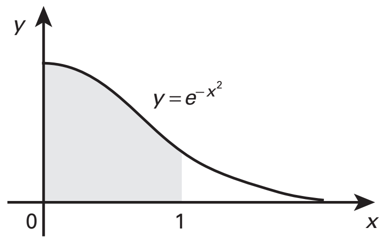
Evidencias de aprendizaje

1. Aplica la regla de los trapecios con $n = 5$ para obtener una aproximación de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. Dibuja los trapecios en la gráfica.

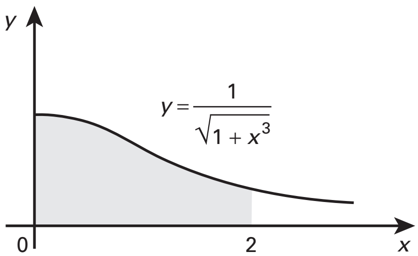


R. $A \approx 0.6956$

2. Aplica la regla de los trapecios con $n = 10$ para obtener una aproximación de la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Observa que es imposible completar la diferencial de la función:

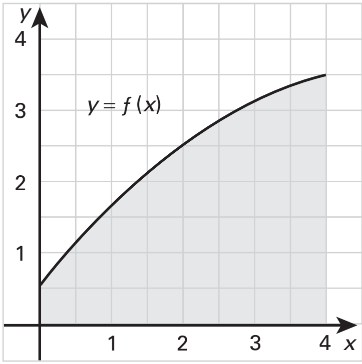


3. Aplica la regla de los trapecios con $n = 10$ para obtener una aproximación de la integral $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$. Dibuja los trapecios en la gráfica:



R. $A \approx 1.40144$

4. Sea $\int_0^4 f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es la función de la gráfica. Usa la gráfica para estimar el área sombreada.



5. La velocidad v en el velocímetro de un automóvil a intervalos de un minuto registró los valores de la tabla siguiente. Usa la regla de los trapecios para estimar la distancia recorrida por el vehículo. (*Sugerencia:* transforma mi/hr a mi/min.

t(min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v(mi/hr)	40	42	45	49	52	56	57	57	55	56

R. $A \approx 6.9144$

Regla de Simpson

La regla de Simpson es una opción más para la integración aproximada, cuya demostración se omitirá para fines prácticos, esta aproximación se plantea a partir del uso de parábolas en lugar de segmentos rectilíneos. Se conoce como regla de Simpson, en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761).

Al aplicar la regla es importante fijarse en el patrón de los coeficientes de ésta: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y n es número par.

Ejemplo

Usa la regla de Simpson con $n = 10$ para obtener una aproximación de la integral:

$$\int_1^2 x^2 dx$$

Solución

$$\text{Con } n = 10,\ a = 1 \text{ y } b = 2, \text{ tenemos que } \Delta x = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

Por lo tanto,

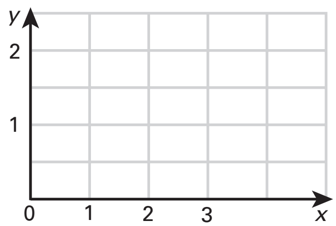
$$\int_1^2 x^2 dx \approx \frac{0.1}{3}\left[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)\right]$$

$$\approx \frac{0.1}{3}\left[(1)^2 + 4(1.1)^2 + 2(1.2)^2 + 4(1.3)^2 + \cdots + 2(1.8)^2 + 4(1.9)^2 + (2)^2\right] \approx 2.33333$$

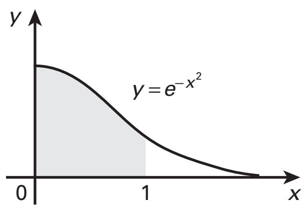
Este mismo ejemplo con la regla de los trapecios nos dió un resultado aproximado de 2.34.

Evidencias de aprendizaje

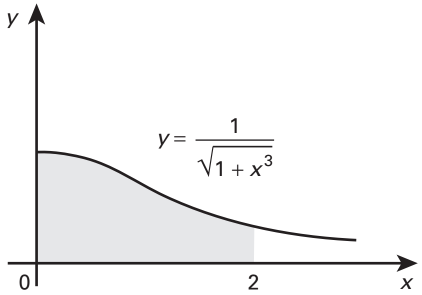
1. Aplica la regla de los Simpson con $n = 10$ para obtener una aproximación de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$. Dibuja la gráfica y sombrea el área calculada.



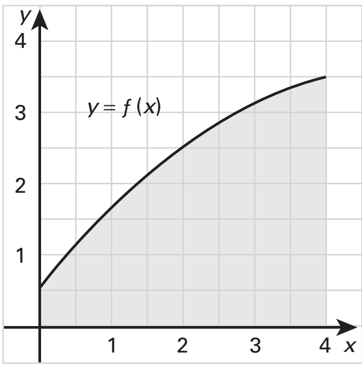
2. Aplica la regla de Simpson con $n = 10$ para obtener una aproximación de la integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.



3. Aplica la regla de Simpson con $n = 10$ para obtener una aproximación de la integral $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$.



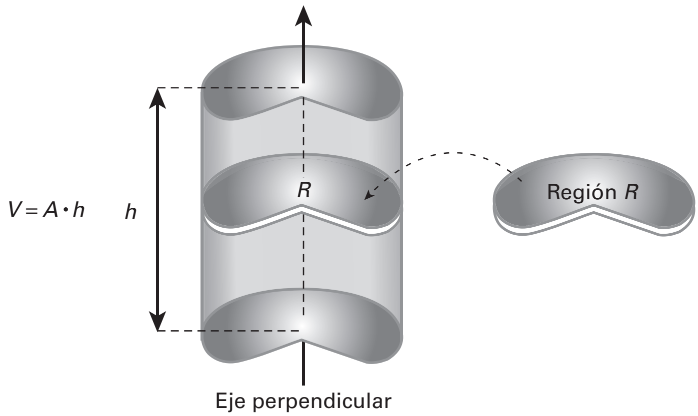
4. Sea $\int_0^4 f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es la función de la gráfica. Usa la gráfica para estimar el área sombreada con la regla de Simpson.



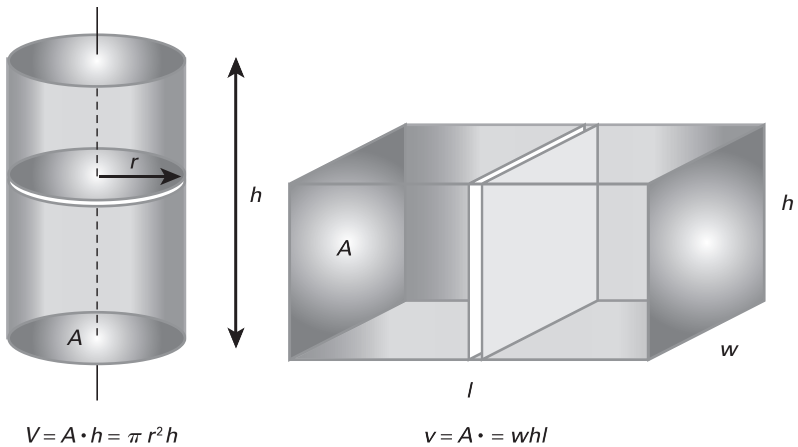
Cálculo de volúmenes

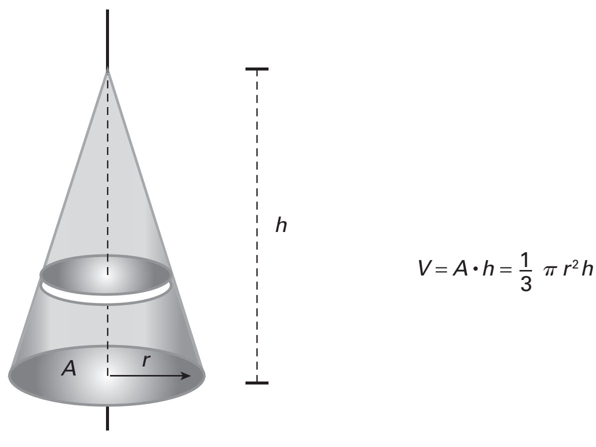
Secciones paralelas (elementos de sección)

De la misma forma que lo hicimos con las áreas de regiones planas, en esta parte utilizaremos las integrales definidas para encontrar los volúmenes de ciertos sólidos en tercera dimensión. Un **cilindro** cualquiera con *sección transversal* R es un sólido formado por la traslación de la región R a lo largo de un *eje perpendicular a ésta*. Si A es el área de la región R y ésta se traslada a lo largo de una distancia h, entonces el volumen generado por la sección es $V = A \cdot h$, como se muestra en la figura.



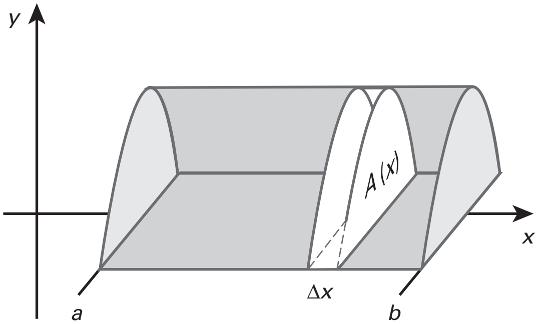
Algunos sólidos de volúmenes muy familiares son un cilindro recto de radio r y altura h, una caja rectangular de longitud l, ancho w y altura h, un cono de radio r y altura h, etcétera.





Imaginemos que un sólido de forma cualquiera se rebana como una hogaza de pan y que, además, está situado entre $x = a$ y $x = b$. Designemos una sección de área arbitraria (una rebanada) como $A(x)$, perpendicular al eje x, y que varía continuamente a lo largo del eje. Entonces podemos decir que si se suman los volúmenes de todas estas rebanadas, se obtiene una aproximación para el volumen total del sólido. Esto es:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x$$



Evidentemente, esta aproximación va a mejorar cuando $n \to \infty$, es decir las rebanadas se van adelgazando, entonces estamos utilizando de nueva cuenta las **sumas de Riemann** pero considerando volúmenes, con lo que tenemos la siguiente definición:

Volumen de un sólido. Sea un sólido que se encuentra entre $x = a$ y $x = b$. Si el área $A(x)$ de la sección transversal del sólido está en un plano perpendicular al eje x y varía continuamente a través de éste, entonces el volumen del sólido es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Cuando usemos la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$, es importante recordar que $A(x)$ es una sección variable, dependiendo de la forma del sólido, obtenida al efectuar un corte transversal perpendicular al eje x.

Ejemplos

1. Demostrar que el volumen de una esfera de radio r es:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^2$$

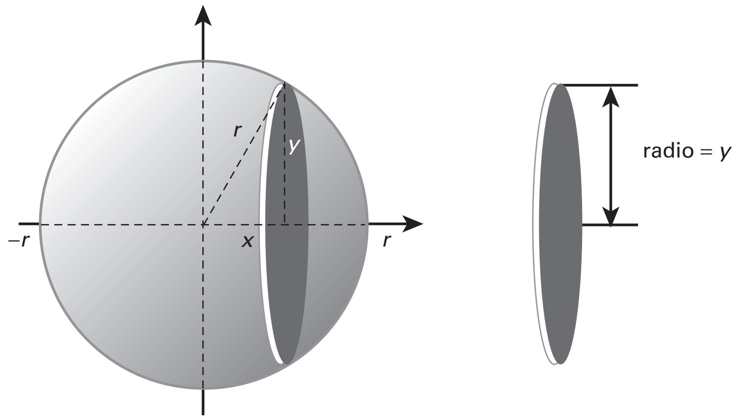
(*Continúa*)

(*Continuación*)

Solución

Vamos a situar la esfera con su centro en el origen, de manera que las secciones sean perpendiculares al eje x. El radio y de una rebanada cualquiera es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Por tanto, el área de la sección transversal es:

$$A = \pi\, y^2 = \pi\left(r^2 - x^2\right)$$



Entonces, por la definición de volumen tenemos que:

$$\begin{aligned} V = \int_{-r}^{r} A\left(x\right)dx &= \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - x^2\right)dx \\ &= 2\pi\int_{0}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\ &= 2\pi\left[r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} - \left(r^2\left(0\right) - \frac{0^3}{3}\right)\right] \\ &= 2\pi\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] = 2\pi\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \end{aligned}$$

Observa que $y^2 = r^2 - x^2$

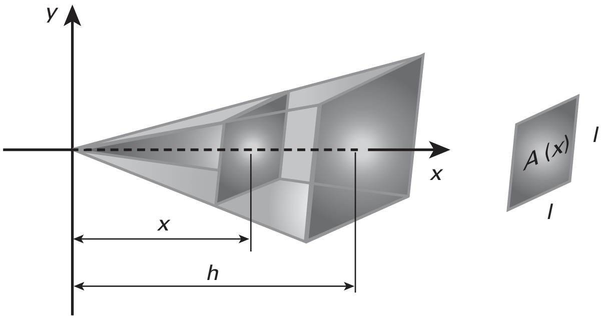
2π ocurre porque integramos de 0 a r

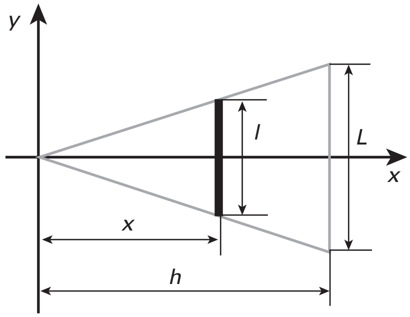
2. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado L y altura h.

Solución

Por conveniencia, colocamos el vértice de la pirámide en el origen y el eje x lo hacemos coincidir con su eje central; designaremos la sección transversal con un cuadrado de lado l. El lado l lo podemos poner en función de x, considerando los triángulos semejantes de la figura:

$$\frac{l/2}{x} = \frac{L/2}{h};\ \text{de manera que}\ \frac{x}{h} = \frac{l}{L}\ \text{y}\ l = \frac{L}{h}x.$$





El área de la sección transversal es:

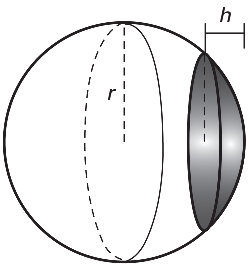
$$A(x) = l^2 = \left(\frac{L}{h}x\right)^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

La pirámide se encuentra entre $x = 0$ y $x = h$, por tanto, su volumen es:

$$V = \int_0^h A(x)dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2 dx = \frac{L^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^h = \frac{L^2 h}{3}$$

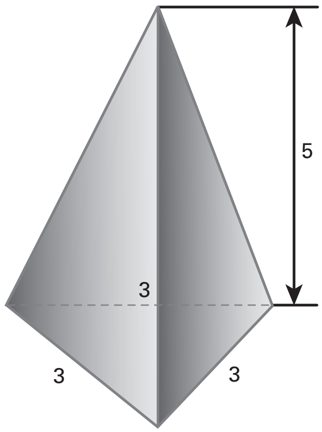
Evidencias de aprendizaje

1. Encuentra el volumen del casquete de una esfera con radio r y altura h.

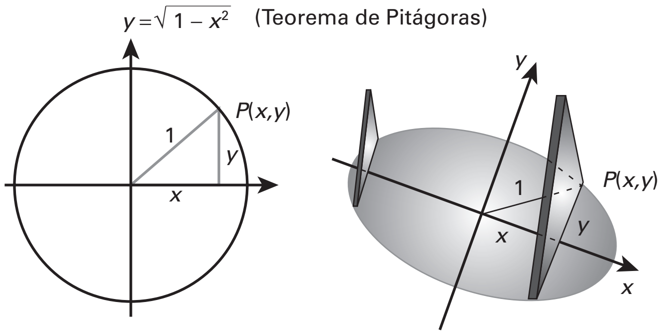


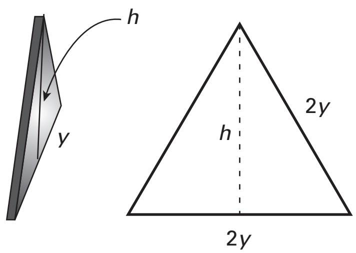
R. $\pi\, h^2\left[r - \frac{h}{3}\right]$

2. Encuentra el volumen de una pirámide con altura 5 y base de un triángulo equilátero con lado 3.



3. Un sólido tiene base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas, perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Encuentra el volumen del sólido.





Registro personal de avance y aprovechamiento

Nombre del alumno: ______________________________

Grupo: ______________ **Turno:** ______________

Actividad	**Valor**	**Porcentajes por bloque**				**Calificaciones**		
		B-1	**B-2**	**B-3**	**B-4**	**Parciales**		**Final**
Tareas								
Trabajo colaborativo								
Autoevaluación y coevaluación								
Exámenes objetivos								
Total	**100%**							

Fórmulas matemáticas

ÁLGEBRA

OPERACIONES ARITMÉTICAS			
$a(b+c)=ab+ac$	$\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$	$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$

EXPONENTES Y RADICALES			
$a^m\, a^n=a^{mn}$	$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$(a^m)^n=a^{mn}$	$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
$(ab)^n=a^n\, b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$		$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

FACTORIZACIONES ESPECIALES		
$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$	$a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-ab+b^2)$	$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

PRODUCTOS NOTABLES	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}b^n$$

donde $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ y $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$

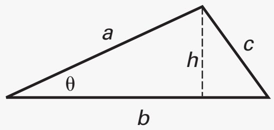
FÓRMULA CUADRÁTICA	VALOR ABSOLUTO
Si $ax^2 + bx + c = 0$, la solución para x es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Para toda $a > 0$, entonces $\lvert x\rvert = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$ $\lvert x\rvert < a$ significa que $-a < x < a$ $\lvert x\rvert > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$

GEOMETRÍA BÁSICA

FIGURAS GEOMÉTRICAS ELEMENTALES

Triángulos

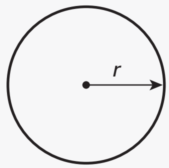
Área $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta$



Círculos

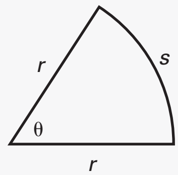
Área $= \pi r^2$

Perímetro $= 2\pi r$



Sector de círculos

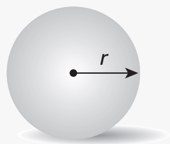
Área $= \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$



Esfera

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

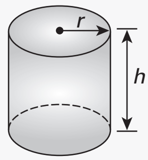
Área $= 4\pi r^2$



Cilindro

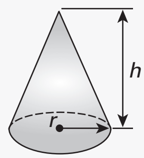
Área $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

Volumen $= \pi r^2 h$



Cono

Volumen $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

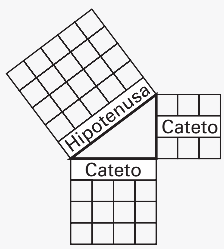


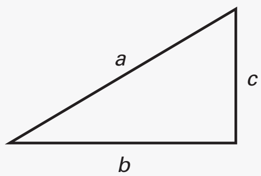
TRIGONOMETRÍA

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2 $\qquad b^2 + c^2 = a^2$

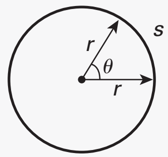




SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

$180° = \pi$ radianes

$s = r\theta$ (θ medido en radianes)

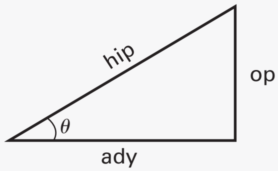


DEFINICIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$ $\qquad \cos\ \theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$

$\tan\ \theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}}$ $\qquad \cot\ \theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$

$\sec\ \theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$ $\qquad \csc\ \theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$



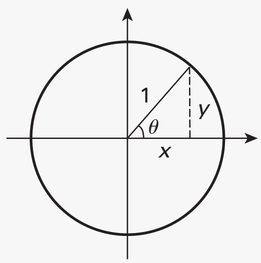
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

$x^2 + y^2 = 1$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{1} = y$

$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$



LEYES DE SENOS Y COSENOS

Ley de senos. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

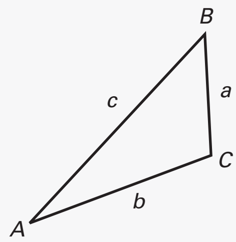
$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$

Ley de cosenos. El coseno de un ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman menos el cuadrado del lado opuesto, todo dividido entre dos veces el producto de los lados que lo forman

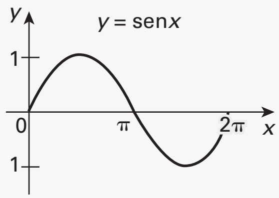
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

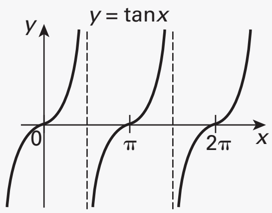
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

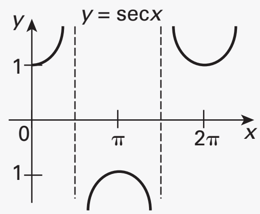
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

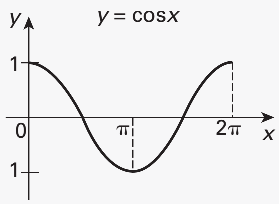


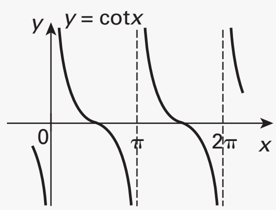
GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

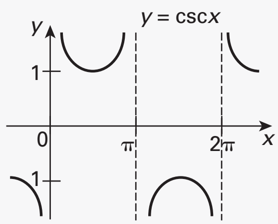












IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	$\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	
$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$	$\csc^2\theta = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta$	$\operatorname{sen}\theta = \cos(90^\circ - \theta)$	
$\cos\theta = \operatorname{sen}(90^\circ - \theta)$	$\tan\theta = \operatorname{ctg}(90^\circ - \theta)$	$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

FÓRMULAS DE ÁNGULOS DOBLES

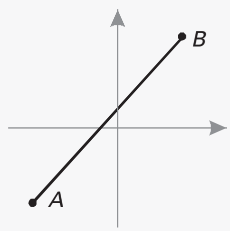
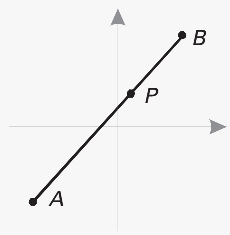
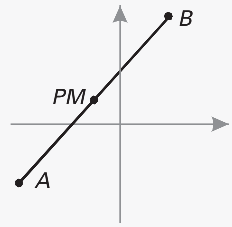
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

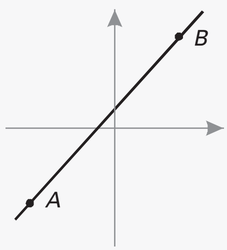
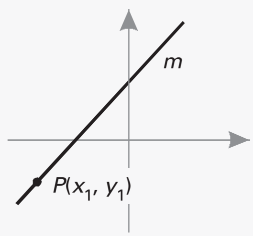
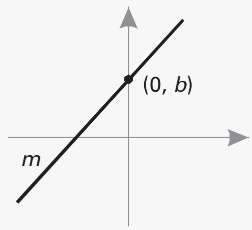
FÓRMULAS DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS	
$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$
$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y$	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$
$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$	$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

FÓRMULAS DE MEDIO ÁNGULO	
$\operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS	
$y=\operatorname{sen}x \quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{sen}^{-1}y$	$y=\cos x \quad\Rightarrow\quad x=\cos^{-1}y$
$y=\tan x \quad\Rightarrow\quad x=\tan^{-1}y$	$y=\operatorname{ctg}x \quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{ctg}^{-1}y$
$y=\sec x \quad\Rightarrow\quad x=\sec^{-1}y$	$y=\csc x \quad\Rightarrow\quad x=\csc^{-1}y$

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

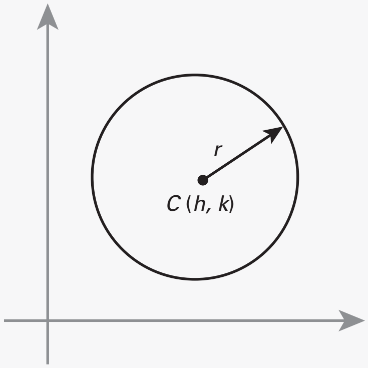
Distancia de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$	**División de un segmento AB en una razón r**	
$d = \lvert AB \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 	$r \neq 1$ $x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$; $y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$ 	Punto medio $r = 1$ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ 

Pendiente de la recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$	**Ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m**	**Ecuación de la recta de pendiente m y ordenada en el origen b**
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 	$y - y_1 = m(x - x_1)$ 	$y = mx + b$ 

CÍRCULOS

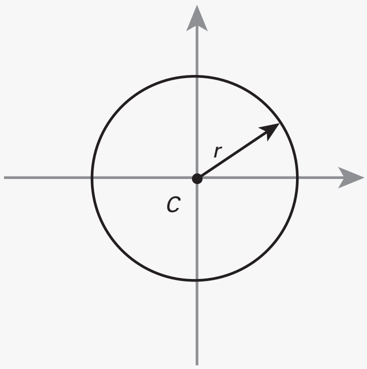
Ecuación del círculo con centro en (h, k) y radio r.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$



Ecuación del círculo con centro en el origen y radio r.

$x^2 + y^2 = r^2$



CÁLCULO DIFERENCIAL

DEFINICIÓN DE DERIVADA

$\dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h} = m_{\tan}$ donde $m_{\tan}$ es la pendiente de la tangente a $f(x)$ en un punto

DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

$\dfrac{d}{dx}c = 0$	$\dfrac{d}{dx}x = 1$	$\dfrac{d}{dx}cf(x) = c\dfrac{d}{dx}f(x)$
$\dfrac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right] = \dfrac{d}{dx}f(x)+\dfrac{d}{dx}g(x)-\dfrac{d}{dx}h(x)$		$\dfrac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$	$\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$	

Ciertos autores utilizan $u = f(x)$ y $v = g(x)$, por tanto $\dfrac{du}{dx} = f'(x)$ y $\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$

DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

$\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{\log_a e}{u}\dfrac{d}{dx}u$	$\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{u}\dfrac{d}{dx}u$	$\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \dfrac{d}{dx}u$	$\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{d}{dx}u$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS		
$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} ctgu = -\csc^2 u \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u ctgu \frac{d}{dx} u$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS		
$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sec u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{d}{dx} u$	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\csc u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{d}{dx} u$

En la actualidad generalmente para escribir las funciones anteriores se utiliza la siguiente notación

$$\operatorname{sen}^{-1} u,\ \cos^{-1} u,\ \tan^{-1} u,\ ctg^{-1} u,\ \sec^{-1} u,\ \csc^{-1} u$$

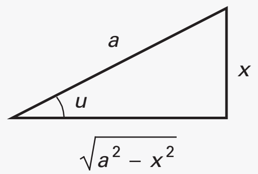
CÁLCULO INTEGRAL

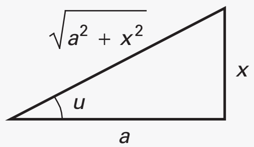
DEFINICIÓN DE INTEGRAL	
Integral indefinida $\int f'(x)dx = f(x) + C$	Integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

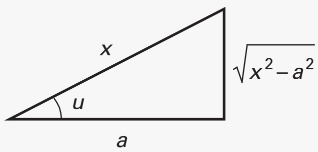
INTEGRALES ELEMENTALES		
$\int dx = x + C$	$\int cdu = c\int du$	$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
$\int u^n dv = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$	$\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$
$\int \sec^2 u du = \tan u + C$	$\int \csc^2 u du = -\operatorname{ctg} u + C$	$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
$\int \csc u \operatorname{ctg} u du = -\csc u + C$	$\int \tan u du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + C$
$\int \sec u du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	$\int \csc u du = \ln\lvert\csc u - ctgu\rvert + C$	
$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a} + C$	

$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$	$\int \sqrt{a^2-u^2}\,dv = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$
$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$	

INTEGRACIÓN POR PARTES
$\int udv = uv - \int vdu$

<table>
<tr><th colspan="3">INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA</th></tr>
<tr><th>Expresión</th><th>Sustitución</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2-x^2}$</td><td>$x = a\operatorname{sen}u$
$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2+x^2}$</td><td>$x = a\tan u$
$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec u$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x^2-a^2}$</td><td>$x = a\sec u$
$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan u$</td><td>


</td></tr>
</table>

El contenido temático de este libro está diseñado para cumplir con los requisitos de un curso de matemáticas básicas, en lo que respecta a los conceptos de cálculo integral, de acuerdo con el plan de estudios del Bachillerato General.

Este libro se enfoca fundamentalmente en el desarrollo de las **competencias** que deben caracterizar a un estudiante del nivel medio superior, como eje principal en su formación educativa. De esta forma, la presente obra contribuye a desarrollar los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que distinguirán al alumno al concluir el estudio de la asignatura de ***Matemáticas VI*** y que perdurarán a lo largo de su vida.

Además esta obra servirá para apoyar y facilitar la gran tarea que realizan los docentes durante el curso para desarrollar y ejecutar una mejor planeación de los materiales didácticos, en función del tiempo y de las necesidades institucionales y sociales. Este libro, sin duda, ayudará tanto a los profesores como a los alumnos a cosechar los mejores frutos de su trabajo.

ISBN 978-607-32-1011-9

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net